Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 11

Besprechung 11.07.2014.

Aufgabe 1 (FDM mit Neumann-Randbedingungen) (4 Punkte)

Erweitern Sie Ihre Implementierung der FDM (Übungsblatt 10, Aufgabe 3) derart, dass Neumann-Randbedingungen übergeben und berücksichtigt werden. Testen Sie Ihre Implementierung an geeigneten Beispielen. Wie würde man nun *Robin-Randbedingungen* behandeln?

Aufgabe 2 (Kollokationsverfahren - Anwendung) (4 Punkte)

Approximieren Sie mit der Kollokationsmethode die Lösung des Randwertproblems

$$y''(t) + t^2 y' - xy = e^t, \qquad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Als Basis-Funktionen wählen Sie

$$\varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_1(t) = t(t-1), \quad \varphi_3(t) = t^2(t-1),$$

und als Kollokationspunkte $t_1 = 1/3, t_2 = 2/3$.

Aufgabe 3 (Kollokationsverfahren und RKV) (5 Punkte)

Seien $\tau_1, \ldots, \tau_m$ paarweise verschiedene reelle Zahlen mit $0 \le \tau_i \le 1$, $i = 1, \ldots, m$. Das Kollokationspolynom $P_m(t)$ ist ein Polynom vom Grad höchstens m, welches die Kollokationsbedingungen

$$\begin{aligned} &P_m(t_i) = x_i, \\ &\dot{P}_m(t_i + \tau_j h) = f(t_i + \tau_j h, P_m(t_i + \tau_j h)), \qquad j = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

erfüllt. Als numerische Lösung des Kollokationsverfahrens wird dann $x_{i+1} = P_m(t_i + h)$ definiert. Zeigen Sie, dass das so definierte Kollokationsverfahren äquivalent zu einem m-stufigen impliziten RKV mit den Koeffizienten

$$\beta_{ij} = \int_0^{\tau_j} L_\ell(s)(\tau) ds, \qquad \gamma_j = \int_0^1 L_j(s) ds, \qquad j, \ell = 1, \ldots, m,$$

wobei $L_j(s)$ das Lagrange-Interpolationspolynom

$$L_j(s) = \prod_{\ell=1, \ell \ne j}^{m} \frac{s - \tau_\ell}{\tau_j - \tau_\ell}$$

bezeichnet.