ulm university universität ulm

Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 2

Besprechung 09.05.2014.

Aufgabe 1 (Alles mit der nötigen Schärfe) (3 Punkte)

Nach dem *Stabilitätssatz* 1.1.3 gilt für die auf $[t_0, t_0 + \alpha]$, $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$ eindeutige Lösung $y(t; t_0, z)$ des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = z,$$

mit einer auf $R_D := \{(t, y) : t \in [t_0, t_0 + a], \|y - z\| \leq b, \, z \in D\}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, stetigen und bezüglich y auf R_D Lipschitz-stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (mit Lipschitz-Konstanten L):

$$\|y(t; t_0, z) - y(t; t_0, \tilde{z})\| \; \leq \; e^{L|t-t_0|}\|z - \tilde{z}\|, \quad z, \tilde{z} \in D.$$

Zeigen Sie, dass die Abschätzung scharf ist.

Aufgabe 2 (Euler-Verfahren, die Nächste...) (2 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -\frac{1}{y(t)}\sqrt{1 - y(t)^2}, \quad y(0) = 1$$

mit der nichttrivialen Lösung $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$ für $0 \leq t \leq 1$. Warum liefert das explizite Eulerverfahren für diese Differenzialgleichung unabhängig von der Schrittweite die Lösung $y_n = 1$?

Aufgabe 3 (Konsistenz / Konvergenzordnung) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das implizite Euler Verfahren konsistent ist und mit Ordnung 1 konvergiert.

(b) Zeigen Sie Lemma 1.3.1.

Aufgabe 4 (Implizites Euler-Verfahren) (4 Punkte)

Leiten Sie sich gemäß Bemerkung 1.2.2 und Beispiel 1.2.3 das implizite Euler-Verfahren her. Wie lässt sich das Verfahren mit Hilfe einer Fixpunktiteration oder einem Newton-Verfahren realisieren? Implementieren Sie das implizite Euler-Verfahren (analog zum expliziten Euler-Verfahren, vlg. Aufgabe 1, Übungsblatt 1) und testen Sie ihre Funktion mit Hilfe der Pendel-Aufgabe (Übungsblatt 1, Aufgabe 3).