Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 4

Besprechung 23.05.2014.

Aufgabe 1 (Autonomisierung) (4 Punkte)

Durch eine sogenannte *Autonomisierung* lässt sich die Zeitvariable als eine Zustandsvariable auffassen. Deshalb lässt sich ein AWP der Form $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ äquivalent umformen zu einem erweiterten System der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s, y) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y(0) \\ s(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ t_0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\hat{\Phi}^{t,s}$ die Evolution des erweiterten Systems, so drückt sich die Äquivalenz der beiden Systeme wie folgt aus

$$\begin{pmatrix} \Phi^{t+h,t}y \\ t+h \end{pmatrix} = \hat{\Phi}^{t+h,t}\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}.$$

Es ist nun naheliegend Runge-Kutta-Verfahren zu entwickeln, welche diese Äquivalenz berücksichtigen, dazu fordern wir, dass sie *invariant gegen Autonomisierung* sind, das bedeutet

$$\begin{pmatrix} \Psi^{t+h,t}y \\ t+h \end{pmatrix} = \hat{\Psi}^{t+h,t}\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix},$$

wobei $\hat{\Psi}$ die diskrete Evolution des Runge-Kutta-Verfahrens bezeichne bezüglich des erweiterten Systems. Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta-Verfahren genau dann invariant gegen Autonomisierung ist, wenn es konsistent ist und zusätzlich

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, s$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (Alles in Ordnung?) (4 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = |1.1 - y(t)| + 1, \qquad y(0) = 1$$

analytisch wie numerisch auf $I = [0, 0.1]$. Zur numerischen Integration verlgeichen Sie das explizite Euler-Verfahren mit dem Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = 2, 3, 4$, jeweils zu mehreren geeignet gewählten konstanten Schrittweiten $h > 0$. Stellen Sie die Fehler aller Verfahren am Endzeitpunkt sinnvoll graphisch dar. Tragen Sie zudem weiter den Fehler über dem benötigten Aufwand (gemessen in *flops*) auf.

Aufgabe 3 (Dreikörperproblem) **(5 Punkte)**

Die Bahnkurve $(x(t), y(t))$ eines Satelliten, der sich im Gravitationsfeld von Erde und Mond bewegt, wird für den Fall, dass die drei Himmelskörper sich in einer Ebene bewegen, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - \hat{\mu}\frac{x+\mu}{N_1} - \mu\frac{x-\hat{\mu}}{N_2}, \\ y'' &= y - 2x' - \hat{\mu}\frac{y}{N_1} - \mu\frac{y}{N_2} \end{aligned}$$

beschrieben mit den relativen Massen

$$\mu = \frac{m_M}{m_E + m_M} \quad \text{und} \quad \hat{\mu} = \frac{m_E}{m_E + m_M} = 1 - \mu,$$

wobei m_E die Erdmasse und m_M die Mondmasse bezeichnen. N_1 und N_2 sind gegeben durch

$$N_1 = \left((x+\mu)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad N_2 = \left((x-\hat{\mu})^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dabei ist die Bewegung des Satelliten im $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten $(x(t), y(t))$ ein um den Ursprung rotierendes Koordinatensystem (Schwerpunktsystem). Die Erde befindet sich hierbei im festen Punkt $(-\mu, 0)$ und der Mond im festen Punkt $(\hat{\mu}, 0)$. Mit den Anfangswerten

$$x(0) = 0.994, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.0015851063790825$$

ergibt sich für $\mu = 0.012277471$ als Lösung ein geschlossener sogenannter (vierblättrige) Arenstorf-Orbit mit einer Periode von $T = 17.0652165601579625588\!9$ (Monaten).

1. Transformieren Sie das System auf ein System erster Ordnung der Gestalt

$$u' = f(t, u) \quad \text{mit} \quad u(t) = (x(t), x'(t), y(t), y'(t))^T.$$

2. Betrachten Sie für die Zeitschrittweite $h = T/N$, $N > 0$, das numerische Verfahren

$$u_h^{i+1} = u_h^i + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right)$$

mit

$$k_1 = f(t_i, u_h^i), \qquad k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, u_h^i + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, u_h^i + \frac{1}{2}hk_2\right), \quad k_4 = f(t_i + h, u_h^i + hk_3).$$

Berechnen Sie für $N = 12000$ mit diesem Verfahren die numerische Lösung u_h, und stellen Sie die Bahnkurve $(x(t), y(t))$ des Satelliten grafisch dar. Vergleichen Sie diese Lösung mit der Lösung für $N = 6000$ und $N = 3000$.

3. Verwenden Sie anstatt des Verfahrens in Teil b) nun das Euler-Verfahren. Was beobachten Sie?