



Prof. Dr. Karsten Urban
 M.Sc. Mladjan Radic
 Institut für Numerische Mathematik
 Universität Ulm

Numerik IV
 SoSe 2014

Übungsblatt 5

Besprechung 30.05.2014.

Aufgabe 1 (Extrapolation)

(4 Punkte)

Konstruieren Sie mittels Extrapolation aus dem Euler-Verfahren ein Verfahren

- (i) der Ordnung 2,
- (ii) der Ordnung 3.

Charakterisieren Sie die so gewonnenen Verfahren.

Aufgabe 2 (Dreikörperproblem, die Zweite)

(5 Punkte)

Gegeben ist das explizite Runge-Kutta-Verfahren von Dormand & Prince

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
====	====	====	====	====	====	====	====
x_1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
\hat{x}_1	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

x_1 ist ein Verfahren fünfter Ordnung. Das eingebettete Verfahren \hat{x}_1 ist von der Ordnung vier. Man benutzt die Differenz beider Lösungen als Fehlerschätzer

$$\text{err} = \max_i \left| \frac{|(x_1)_i - (\hat{x}_1)_i|}{1 + |(x_1)_i|} \right|.$$

Dabei ist $(\cdot)_i$ die i -te Vektorkomponente. Man kann diesen Fehlerschätzer zur Zeitschrittsteuerung verwenden. Der neue Zeitschritt h_1 ergibt sich zu

$$h_1 = \min\{2, \max\{0.5, 0.9(\text{TOL}/\text{err})^{1/(q+1)}\}\}h_0,$$

wobei q das Minimum der beiden Ordnungen von x_1 und \hat{x}_1 ist. In unserem Fall ist also $q = 4$. TOL ist eine vorgegebene Toleranz und h_0 der alte Zeitschritt. Die Lösung x_1 wird akzeptiert, wenn

$$\text{err} < \text{TOL}$$

ist. Ansonsten wird der Zeitschritt, ausgehend von x_0 , mit Schrittweite h_1 wiederholt.

Man programmiere das Dormand-Prince 5(4)-Verfahren mit Zeitschrittsteuerung und löse damit das Arenstorf-Problem (Dreikörperproblem) vom letzten Blatt. Man verwende für y' die Anfangswerte

$$-2.001585106, -2.01, -2.02, -2.03, -2.031732630$$

und vergleiche die Orbits. Man stelle außerdem die von der Zeitschrittsteuerung gewählten Zeitschritte graphisch dar. Als Toleranz kann man $\text{TOL} = 10^{-6}$ wählen.

Hinweis: Sie dürfen das Ihnen zur Verfügung gestellte Material auf der Homepage zur Hilfe nehmen und dazu die Datei `dreikoerper_dopri.m` verwenden und ergänzen.