Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 6

Besprechung 06.06.2014.

Aufgabe 1 (Ein steifes Problem) (5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die exakte Lösung.

(ii) Was ergibt das explizite Euler-Verfahren? Was folgt für die Schrittweite?

(iii) Welche Lösung liefert das implizite Euler-Verfahren? Warum unterliegt dieses Verfahren keiner Schrittweitenbeschränkung?

(iv) Lösen Sie obiges Anfangswertproblem numerisch

  (a) mit dem expliziten Euler-Verfahren.

  (b) mit dem implizieten Euler-Verfahren.

  Verwenden Sie verschiedene Schrittweiten. Beachten Sie hierbei die Schrittweitenbeschränkungen. Plotten Sie jeweils den Fehler in Abhängigkeit von der Schrittweite.

Aufgabe 2 (Stabilitätsfunktion von RKV) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass alle s-stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = s$ die Stabilitätsfunktion

$$R^s(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^s}{s!}$$

haben. Man stelle die Stabilitätsgebiete für $s = 1, 2, 3, 4, 5$ (mit Matlab) graphisch dar.

Hinweis: Die Stabilitätsfunktion $R^s(z)$ eines numerischen Verfahrens wird wie folgt definiert: Wendet man das Verfahren auf die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ an, dann ist ein Schritt des Verfahrens durch

$$x_1 = R^s(h\lambda)x_0$$

gegeben. Man bezeichnet das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |R^s(z)| \leq 1\}$ in der komplexen Ebene als Stabilitätsgebiet des Verfahrens.

Aufgabe 3 (Stabilitätsbegriffe) (4 Punkte)

Das Anfangswertproblem $y' = Ay$ mit $y(0) = y_0$ sei asymptotisch stabil. Zeigen Sie, dass eine A-stabile rationale Approximation R der Exponentialfunktion genau dann

$$\Psi^t = R(tA) \to 0, \qquad \text{für } t \to \infty$$

erfüllt, wenn $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Bedingung für die Funktion Ψ^t.