Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

Übungsblatt 7

Besprechung 13.06.2014.

Aufgabe 1 (Fixpunktiteration bei implizitem RKV) (5 Punkte)

Wir betrachten ein m-stufiges implizites Runge-Kutta-Verfahren mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline & \gamma \end{array}$$

wobei $\alpha \in [0,1]^m$, $\beta = (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\gamma \in \mathbb{R}^m$ und der Schrittweite $h > 0$ zu Lösung des skalaren Anfangswertproblems $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$. Die Funktion f erfülle bezüglich y eine Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Zeigen Sie, dass falls

$$hL\|\beta\|_\infty < 1,$$

mit $\|\beta\|_\infty := \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^m |\beta_{ij}|$ gilt, dann besitzt das nichtlineare Gleichungssystem

$$k_i = f\left(t + \alpha_i h, y + h\sum_{j=1}^m \beta_{ij} k_j\right), \qquad i = 1,\dots,m,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $k^* = (k_1^*,\dots,k_m^*)^T \in \mathbb{R}^m$ und die Folge $\left(k^{(\ell)}\right)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ der dazu assoziierten Fixpunktiterierten konvergiert für beliebige Startvektoren $k^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ gegen k^*. Zeigen Sie weiter, dass für hinreichend kleine Schrittweiten $h > 0$ mit einer von h unabhängigen Konstanten $c_1 > 0$ folgende Ungleichung gilt

$$\|k^{(\ell)} - k^*\|_\infty \le c_1 h^\ell \|k^{(1)} - k^{(0)}\|_\infty, \qquad \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 2 (Stabilitätsfunktion von impliziten RKV) (5 Punkte)

Wir betrachten nun erneut ein m-stufiges implizites Runge-Kutta-Verfahren mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline & \gamma \end{array}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion R eines (impliziten) m-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens gegeben ist durch

$$R(z) = 1 + z\gamma^T(I - z\beta)^{-1}e, \qquad e = (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^m.$$

(ii) Zeigen Sie weiter, dass die rationale Funktion R dabei in eindeutiger Weise in der Form $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit teilerfremden, durch $P(0) = Q(0) = 1$ normierten Polynomen P, Q dargestellt werden kann.

(iii) Ist bei einem impliziten RKV die Matrix β nicht-singulär und der Vektor γ mit einer Zeile der Matrix β identisch, so gilt $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$.

Aufgabe 3 (Implizites RKV) **(5 Punkte)**

Programmieren Sie das 3-stufige implizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Verwenden Sie zur Lösung des impliziten Gleichungssystems das einfache Fixpunktiterationsverfahren mit $M \in \mathbb{N}$ Iterationen und Startwert 0. Versuchen Sie dabei, die spezielle Struktur des Verfahrens (letzte Spalte von β verschwindet!) möglichst gut auszunutzen.
Testen Sie Ihr Programm an den Anfangswertaufgaben in Aufgabe 4 (i)-(iii) auf Übungsblatt 3, indem Sie für $M = 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils mit verschiedenen, aber geeignet gewählten Schrittweiten die Fehler (am Endzeitpunkt) sowie die numerischen Konvergenzordnungen berechnen. Was beobachten Sie? Wenden Sie Ihr Programm auch auf das Dreikörperproblem an, was beobachten Sie hier? Variieren Sie (sinnvoll!) die Schrittweite. Wäre es hier sinnvoll, den Aufwand des impliziten RKV mit dem Aufwand des RKV von Dormand & Prince zu vergleichen? Begründen Sie Ihre Antwort.