Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

# Übungsblatt 9

Besprechung 27.06.2014.

## Aufgabe 1 (Schießverfahren) (2+2+1 Punkte)

Zur Lösung des Randwertproblems

$$y''(x) = 100y(x), \quad y(0) = 1, \quad y(3) = e^{-30},$$

mittels einfachem Schießverfahren betrachtet man das Anfangswertproblem

$$y''(x) = 100y(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s. \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie die Lösung $y(x,s)$ von (1) und finden Sie $s^*$, so dass $y(3,s^*) = e^{-30}$.

(ii) Wie lautet die gestörte Lösung $y(3, s^*(1+\varepsilon))$?

(iii) Ist ein einfaches Schießverfahren zur Lösung des obigen Randwertproblems geeignet?

## Aufgabe 2 (Implementierung des Schießverfahrens) (5 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des Randwertproblems

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

mittels einfachem Schießverfahren. Verwenden Sie ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 zur Lösung des Anfangwertproblems und das Newton-Verfahren zur Bestimmung des Parameters $s$.
Testen Sie das Programm für die Randwertprobleme

$$y''(x) = 4(y(x) - x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

und

$$y''(x) = y'(x) + 2y(x) + \cos(x), \quad y(0) = -\frac{3}{10}, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{10}.$$

Veranschaulichen Sie die Konvergenz des Verfahrens graphisch.

## Aufgabe 3 (Konvergenz des Schießverfahrens bei linearen RWA) (5 Punkte)

Wir betrachten die folgende lineare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &y'(t) - A(t)y(t) = f(t), \qquad t \in I := [a,b], \\ &B_a y(a) + B_b y(b) = g. \end{aligned}$$

Die kontinuierliche Lösung ist dann gegeben in der Form

$$y(t;\hat{s}) = u_0(t) + U(t)\hat{s}$$

mit den Lösungen $u_0 : I \to \mathbb{R}^n$, $U : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ der Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} &u_0'(t) - A(t)u_0(t) = f(t), \qquad t \in I, \qquad u(a) = 0, \\ &U'(t) - A(t)U(t) = 0, \qquad t \in I, \qquad Y(a) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

sowie der Lösung $\hat{s} \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems

$$Qs := (B_a + B_b Y(b))s = g - B_b u_0(b),$$

vorausgesetzt $(B_a + B_b Y(b))$ ist regulär. Dabei ist $y(t; \hat{s})$ die Lösung der AWA

$$y(t; \hat{s}) - A(t) y(t; \hat{s}) = f(t), \qquad t \in I, \qquad y(a; \hat{s}) = \hat{s},$$

für die gerade die Randbedingung $B_a y(a) + B_b y(b) = g$ erfüllt ist. Sei nun eine äquidistante Diskretisierung von $I$ der Form $a = t_0 < t_1 = t_0 + h < \ldots < t_{n-1} < t_N = b$ gegeben, wobei $h := \frac{b-a}{N}$ die Schrittweite ist. Sei nun $(u_{i,k}^h)_{k=0}^N$, $i = 0, \ldots, n$ eine Approximation (z.B. durch ein Einschrittverfahren) zu den Lösungen $u_i$, $i = 0, \ldots, n$ der AWA (2). Dazu sind $n+1$ Systeme zu lösen! Ist das Verfahren von Ordnung $m$, so gilt unter bestimmten Voraussetzungen an $A(t), f(t)$

$$\|u_{i,k}^h - u_i(b)\| \leq K \exp^{L(b-a)} h^m, \qquad \text{wobei } K = K(A(t), f(t))$$

und $L = \max_{t \in I} \|A(t)\|$. Bezeichne nun $U_k^h = [u_{1,k}^h, \ldots, u_{n,k}^h]$ die diskrete Fundamentalmatrix, so wird dann die Matrix $Q^h := B_a + B_b U_N^h$ gebildet. Ist diese regulär, so besitzt das Gleichungssystem

$$Q^h s^h = g - B_b u_N^h$$

eine eindeutige Lösung $\hat{s}^h \in \mathbb{R}^d$ mit der durch

$$y_k^h := u_{0,k}^h + U_k^h \hat{s}^h, \qquad k = 0, \ldots, N$$

eine Näherung zu $y(t)$ definiert ist.

Zeigen Sie, dass für hinreichend kleines $h > 0$ die Matrix $Q^h$ regulär ist und dass das Schießverfahren mit der Ordnung $m$ konvergiert, d.h.

$$\max_{t_k} \|u_k^h - u(t_k)\| = \mathcal{O}(h^m), \qquad h \to 0.$$