Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

# Übungsblatt 1

Besprechung 02.05.2014.

**Hinweise:**

a) Im SLC zur Veranstaltung "Numerik von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (Numerik IV)" anmelden.

b) Theorie-Aufgaben werden von den Studenten in den jeweiligen Übungen vorgerechnet und vorgestellt! Die Matlab-Aufgaben werden an den jeweiligen Terminen vorgestellt. Es wird Anwesenheit vorausgesetzt.

c) Zulassungskriterien für die Prüfung:

- 50% der Theorie-Aufgaben müssen angekreuzt und es muss min. 1 mal vorgerechnet werden.
- 50% der Matlab-Aufgaben müssen bearbeitet und die Lösung muss min. 1 mal vorgestellt werden.

d) Die Abgabe der Lösungen der Matlab-Aufgaben erfolgt per Email (rechtzeitig vor der Besprechung, d.h. min. ein Tag vorher! Donnerstag ab 18:00 Uhr werden keine Lösungen mehr akzeptiert!) an

mladjan.radic@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten "Num4Blatt$x$" (wobei $x$ für die Nummer des Blattes steht). Die Lösungen müssen als **Anhang** an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeM$y$" zu erstellen (wobei $y$ für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

## Aufgabe 1 (Euler-Verfahren - Implementierung) (5 Punkte)

Gegeben sei eine Differenzialgleichung (oder ein System) erster Ordnung $y' = f(t, y)$. Wir suchen die Lösung der Differenzialgleichung $y$ im Zeit-Intervall $t = [t_a, t_e]$. Hierzu wird das Zeit-Intervall in N gleichgroße Teilintervalle $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0 \dots N-1$, $t_0 = t_a, t_N = t_e$ unterteilt.

(i) Leiten Sie das Euler Verfahren für den eindimensionalen Fall aus folgender Idee her:

> Zum aktuellen Zeitschritt $t_k$ wird eine Tangente $T_k(t)$ an die Funktion $y(t)$ gelegt und diese wird an der Stelle $t_{k+1}$ ausgewertet. Der Funktionswert $T_k(t_{k+1})$ ist dann die Näherung an den gesuchten Wert $y(t_{k+1})$. Machen Sie sich die Vorgehensweise an einer Skizze klar und leiten Sie daraus die Berechnungsvorschrift für $y_{k+1}$ her.

Wie könnte man das so gewonnene Verfahren verbessern?

(ii) Schreiben Sie eine Funktion `y = euler_expl(f,y0,t0,tN,N)` in der das Euler-Verfahren für das Anfangswertproblem $y(t) = f(t, y(t))$, $y(t0) = y0$ ausgeführt wird. Das Zeitintervall `[t0, tN]`, auf dem die Lösung gesucht wird, soll dabei in $N$ Teilintervalle unterteilt werden. `f` ist ein function handle.

(iii) Ergänzen Sie Ihr Skript aus der vorigen Aufgabe, so dass für jede Differenzialgleichung auch die Lösung für verschiedene Startwerte $y0$ (sinnvoll wählen!) gezeichnet wird.

## Aufgabe 2 (Umschreiben von ODE's $n$-ter Ordnung) (3 Punkte)

Schreiben Sie die explizite Differenzialgleichung $n$-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

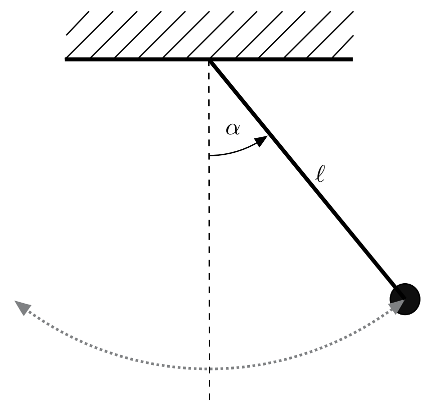
in ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung um.

## Aufgabe 3 (Mathematisches Pendel) **(5 Punkte)**

Für ein mathematisches Pendel der Länge $\ell$ gilt für den Auslenkungswinkel $\alpha(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ folgende Differenzialgleichung:

$$\alpha''(t) + \frac{g}{\ell}\sin\alpha(t) = 0,$$

wobei $g = 9.81 m/s^2$ die Erdbeschleunigung ist.(Das folgt aus der Newtonschen Bewegungsgleichung)




(a) Schreiben Sie diese Differenzialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{pmatrix} = f(\alpha,\alpha') = \begin{pmatrix}f_1(\alpha,\alpha')\\ f_2(\alpha,\alpha')\end{pmatrix}$$

(b) Lösen Sie das System mit Hilfe der Funktion `euler_expl` aus der vorigen Aufgabe mit 1000 Zeitschritten sowie mit der Matlab-Funktion `ode45` (Siehe Matlab Hilfe) für $\alpha(0) = \pi/5$. Zeichnen Sie die beiden Lösungen für $t \in [0, 20]$ in Abhängigkeit von der Zeit und interpretieren Sie die Grafik.

(c) Berechnen Sie aus beiden Lösungen die Position des Pendels zum Zeitpunkt $t$ und erstellen Sie eine Animation, in der für beide Lösungen die Pendelschwingung dargestellt wird.

(d) Zeichnen Sie für verschiedene Anfangswerte $\alpha(0) \in \{\pi/5, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi\}$ die Kurven von $\alpha'(t)$ über $\alpha$ für die beiden Lösungen aus Teil 2. und erklären Sie die Grafiken.

## Aufgabe 4 (Euler-Verfahren - Ein wenig Theorie) **(4Punkte)**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Zeigen Sie, dass das Euler-Verfahren die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{t+1}{y(t)}, \quad y(0) = 1$$

liefert.

(ii) Zeigen Sie, dass im Spezialfall einer linearen Differenzialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

mit den gegebenen und bekannten Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ das implizite Euler-Verfahren auf eine lineare Gleichung für $y_{k+1}$ führt, aus der sich eine explizite Rekursionsformel für $y_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ergibt.