Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen
Session 2 - Runge-Kutta Verfahren

Es für die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$$

mit geeigneten Quadraturpunkten $t_k \leq \xi_i \leq t_{k+1}$ und den Gewichten w_i. Die verschiedenen Runge-Kutta Verfahren unterscheiden sich demnach in der Wahl der Quadraturpunkte und der Gewichte. Üblicherweise wird ein $s-$stufiges Runge-Kutta Verfahren mittels Butcher-Tableau beschrieben

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{s \times s}, b \in \mathbb{R}^s$ und $c \in \mathbb{R}^s$.

Aufgabe 1 *(Implementierung)*

a) Implementieren Sie

- das Verfahren von **Heun**

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- das klassische, explizite, 4-stufige **Runge-Kutta-Verfahren**

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- das implizite, 2-stufige **Radau-IIA Verfahren**

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}.$$

b) Testen Sie die verschiedene Verfahren an folgenden Beispielen

- Davis-Skodje

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -\gamma y_2(t) + \frac{(\gamma - 1)y_1(t) + \gamma y_1^2(t)}{(1 + y_1(t))^2} \end{aligned}$$

mit $\gamma = 10, y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 1.5$ und den Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-t} \\ y_2(t) &= e^{-\gamma t} + \frac{1}{1 + e^t}. \end{aligned}$$

- Nicht-autonome Differentialgleichung

  $$\dot{y} = -2ty(t)^2$$

  mit $y(0) = 1$ und der Lösung

  $$y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

- System von Differentialgleichungen

  $$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_2(t) - y_3(t)\\ \dot{y}_2(t) &= -2y_1(t) + 3y_2(t) - y_3(t)\\ \dot{y}_3(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)\end{aligned}$$

  mit $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_3(0) = 2$ und den Lösungen

  $$\begin{aligned}y_1(t) &= e^t - 4te^t\\ y_2(t) &= e^t - 4te^t - 2e^{2t}\\ y_3(t) &= 4e^t - 2e^{2t}.\end{aligned}$$

Visualisieren Sie die numerischen und analytischen Lösungen, sowie die Konvergenzordnungen der einzelnen Verfahren. Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren und die numerischen Ergebnisse.

Aufgabe 2 *(Konsistenz)*

Zeigen Sie, dass für $f \in C^1$ folgende Äquivalenz gilt:

$$\text{Runge-Kutta Verfahren ist konsistent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

Aufgabe 3 *(Modellgleichungen)*

Wenden Sie die einzelnen Verfahren auf die Modellgleichungen ihres Projektes und diskutieren Sie die numerischen Ergebnisse.