



## Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen

### Session 4 - Randwertprobleme

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die notwendigen Bedingungen für Variations- und Optimalsteuerungsprobleme in Randwertprobleme resultieren. Ziel dieser Session ist, Randwertprobleme numerisch zu lösen. Dabei fokussieren wir uns auf drei Verfahren:

1. Single-Shooting Verfahren
2. Multiple-Shooting Verfahren
3. Differenzenverfahren

#### Aufgabe 1 (Theorie)

Studieren Sie die Paragraphen 19.1 und 19.2, welche die Shooting- und das Differenzenverfahren beschreiben. Verstehen Sie dabei die Grundidee. Was sind die möglichen Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren? Wie berechnet man geschickt in jedem Schritt die Ableitung nach den Anfangswerten bei den Shooting Verfahren?

#### Aufgabe 2 (Implementierung)

a) Implementieren Sie das

- Single-Shooting Verfahren, welches die benötigten Ableitungen mittels
  - Sensitivitätsdifferentialgleichung oder
  - finite Differenzenberechnet.
- Multiple-Shooting Verfahren, welches die benötigten Ableitungen mittels
  - Sensitivitätsdifferentialgleichung berechnet oder
  - BFGS-Update Formel approximiert.Verwenden Sie zusätzlich noch die Armijo-Regel für die Schrittweitensteuerung.
- Differenzenverfahren unter Verwendung der Trapezregel.

b) Testen Sie die verschiedenen Verfahren an folgendem Beispiel (vgl. Beispiel 5.19.6. im Skript). Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\lambda(t) - 15e^{-2t} \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{3}{2}x(t)^2 \\ x(0) &= 4 \\ \lambda(1) &= 5(x(1) - 1).\end{aligned}$$

Der Startwert für das Single-Shooting sei  $\eta^{[0]} = (4, -5)^T$ . Wie bekommt man Startwerte für das Multiple-Shooting? Diskutieren Sie die numerischen Ergebnisse mit Hinblick auf die Stärken und Schwächen der einzelnen Verfahren. Welche Methoden für die Ableitungserzeugung sind gut geeignet? Was ist der (zusätzliche) Aufwand?

#### Aufgabe 3 (Modellgleichungen)

Leiten Sie das zu ihrem Projekt zugehörige Randwertproblem mittels Pontryaginprinzip her.