Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's II
SoSe 2015

Übungsblatt 9

Besprechung 10.07.2015.

Auf diesem Blatt beschäftigen wir uns mit nichtlinearen Problemen. Speziell werden wir die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung betrachten.

Vorbereitung I (Variations- und RB-Formulierung)

Das Variationsproblem soll in der Form gegeben sein: Suche $u(\mu) \in X$ sodass für alle $\mu \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^P$

$$\begin{aligned} g(u(\mu), v; \mu) &= 0, \qquad \forall v \in X, \\ s(\mu) &= L(u(\mu)) \end{aligned}$$

gilt, wobei L unser Ouput ist und g gegeben ist durch

$$g(w, v; \mu) = a_0(w, v) + \frac{1}{2} a_1(w, w, v) - \mu \cdot F(v),$$

Wir definieren weiter die Ableitung dg der Funktion g mit

$$dg(w, v; z) = a_0(w, v) + a_1(w, z, v),$$

sowie die inf-sup und Stetigkeitskonstanten durch

$$\beta(z) := \inf_{w \in X} \sup_{v \in X} \frac{dg(w, v; z)}{\|w\| \|v\|}, \qquad \gamma(z) := \sup_{w \in X} \sup_{v \in X} \frac{dg(w, v; z)}{\|w\| \|v\|}.$$

Mit der Hölder-Ungleichung lässt sich leicht zeigen, dass

$$|a_1(w, z, v)| \leq \rho^2 \|w\| \|v\| \|z\|, \qquad \rho := \sqrt{2} \sup_{v \in X} \frac{\|v\|_{L^4(\Omega)}}{\|v\|}$$

und somit $\gamma(z) \leq 1 + \rho^2 \|z\|$. Wir verlangen weiter, dass g eine affine Zerlegung besitzt und dass es ein $\beta_0 > 0$ gibt, sodass $\beta(u(\mu)) \geq \beta_0$ für alle μ gilt. Seien weiter die Samples $S_N := \{\mu^1, \ldots, \mu^N\}$ gegeben und der reduzierte Basis Raum $W_N := \operatorname{span}\{\zeta_i = u(\mu^i),\ i = 1, \ldots, N\}$. Für die reduzierte Basis Lösung suchen wir also $u_N(\mu)$, sodass $g(u_N(\mu), v; \mu) = 0$ für alle $v \in W_N$ und $s_N(\mu) = L(u_N(\mu))$.

Vorbereitung II (Duales Problem)

Wir formulieren das reduzierte duale Problem: Suche $\Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) \in X$, sodass für $e_N(\mu) := u(\mu) - u_N(\mu)$ gilt:

$$dg(\varphi, \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu) + \frac{1}{2} e_N(\mu)) = -L(\varphi), \qquad \forall \varphi \in X.$$

Die Samplings, sowie der RB-Raum für das duale Problem seien mit $S^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}} = \{\mu^{1,\mathrm{du}}, \ldots, \mu^{N^{\mathrm{du}},\mathrm{du}}\}$, bzw. mit $W^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}} = \operatorname{span}\{\zeta_i(\mu) = \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu^{i,\mathrm{du}}),\ i = 1, \ldots, N^{\mathrm{du}}\}$ bezeichnet.

Aufgabe 1 (Output-Fehler) (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $\Phi \in X$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$s(\mu) - s_N(\mu) = g(u_N(\mu), \Phi; \mu) + g(u_N(\mu), \Psi_N(\mu) - \Phi; \mu).$$

Lösung

Wir bemerken zunächst, dass

$$
\begin{aligned}
-L(e_N(\mu)) &= dg(e_N(\mu), \Psi^N(\mu); u_N(\mu) + \frac{1}{2}e_N(\mu)) \\
&= a_0(e_N(\mu), \Psi^N(\mu)) + a_1(e_N(\mu), u_N(\mu) + \frac{1}{2}e_N(\mu), \Psi^N(\mu)) \\
&= a_0(u(\mu) - u_N(\mu), \Psi^N(\mu)) + a_1(u(\mu) - u_N(\mu), \frac{1}{2}(u(\mu) + u_N(\mu)), \Psi^N(\mu))
\end{aligned}
$$

und unter Ausnutzung der Symmetrie von a_1 in den ersten beiden Komponenten erhalten wir

$$
a_1(u(\mu) - u_N(\mu), \frac{1}{2}(u(\mu) + u_N(\mu)), \Psi^N(\mu)) = \frac{1}{2}a_1(u(\mu), u(\mu), \Psi^N(\mu)) - \frac{1}{2}a_1(u_N(\mu), u_N(\mu), \Psi^N(\mu))
$$

und dadurch erhalten wir weiter mit Hilfe der Linearität von g

$$
\begin{aligned}
-L(e_N(\mu)) &= \mu F(\Psi^N(\mu)) - \left[a_0(u_N(\mu), \Psi^N(\mu)) + \frac{1}{2}a_1(u_N(\mu), u_N(\mu), \Psi^N(\mu))\right] \\
&= -g(u_N(\mu), \Psi^N(\mu); \mu) = -g(u_N(\mu), \Psi^N(\mu) + \Phi - \Phi; \mu) \\
&= -g(u_N(\mu), \Phi; \mu) - g(u_N(\mu), \Psi_N(\mu) - \Phi; \mu).
\end{aligned}
$$

Vorbereitung III (Residuen und Dualnormen)

Wir definieren die Dualnorm des Residuums durch

$$
\varepsilon_N(\mu) := \sup_{v \in X} \frac{g(u_N(\mu), v; \mu)}{\|v\|}
$$

und verwenden weiter die abkürzende Schreibweise für die inf-sup sowie Stetigkeitskonstanten mit $\beta_N(\mu) = \beta(u_N(\mu))$, sowie $\gamma_N(\mu) = \gamma(u_N(\mu))$. Wir definieren weiter

$$
\tau_N(\mu) := 2\rho^2 \frac{\varepsilon_N(\mu)}{\beta_N^2(\mu)}.
$$

Für den dualen Fehler definieren wir das duale Residuum durch $R_{N^{\mathrm{du}}}^{\mathrm{du},N}(\varphi;\mu) := -L(\varphi) - dg(\varphi, \Psi_N(\mu); u_N(\mu))$ für alle $\varphi \in X$. Die Dualnorm des Residuums definieren wir mit

$$
\varepsilon_{N^{\mathrm{du}}}^{\mathrm{du},N}(\mu) := \sup_{\varphi \in X} \frac{R_{N^{\mathrm{du}}}^{\mathrm{du},N}(\varphi;\mu)}{\|\varphi\|}.
$$

Aufgabe 2 (Schätzer für Primalen Fehler) (10 Punkte)

Für $\tau_N(\mu) < 1$ existiert genau eine Lösung $u(\mu) \in \mathcal{B}(u_N(\mu), \beta_N(\mu)/\rho^2)$, sodass

$$
\|u(\mu) - u_N(\mu)\| \leq \Delta_N(\mu) := \frac{\beta_N(\mu)}{\rho^2}\left(1 - \sqrt{1 - \tau_N(\mu)}\right).
$$

Schließen Sie daraus, dass für $\tau_N(\mu) \leq \frac{1}{2}$ gerade $\beta(u(\mu)) \geq \beta_N(\mu)/\sqrt{2}$.

Lösung

Mit der Definition von g lässt sich zeigen, dass folgende Gleichung erfüllt ist

$$
g(w^2, v; \mu) - g(w^1, v; \mu) = \int_0^1 dg(w^2 - w^1, v; w^1 + t(w^2 - w^1))\, dt
$$

und wegen der Stetigkeit von a_1 gilt und mit der Definition von dg

$$
|dg(w, v; z^2) - dg(w, v; z^2)| = |a_1(w, z^2 - z^1, v)| \leq \rho^2 \|w\|\|v\|\|z^2 - z^1\|.
$$

Wir definieren nun den Operator $H^\mu(w)$ durch

$$dg(H^\mu(w), v; u_N(\mu)) = dg(w, v; u_N(\mu)) - g(w, v; \mu), \qquad \forall v \in X.$$

Da wir $\tau < 1$ fordern ist H^μ wohl definiert für alle $w \in X$ und dadurch ist $\beta_N(\mu) > 0$. Wir bemerken weiter, dass ein Fixpunkt w^* von H^μ, also $H^\mu(w^*) = w^*$ gerade $g(w^*, v; \mu) = 0$ für alle $v \in X$ impliziert. Sei nun $w^1 \in \bar{\mathcal{B}}(u_N(\mu); \alpha)$ und $w^2 \in \bar{\mathcal{B}}(u_N(\mu); \alpha)$ und mit den obigen Ungleichungen folgt mit der Koerzivität von dg

$$\begin{aligned}
\beta_N(\mu)\|H^\mu(w^2) - H^\mu(w^1)\| &\leq \sup_{v\in X} \frac{dg(H^\mu(w^2) - H^\mu(w^1), v; u_N(\mu))}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{dg(w^2 - w^1, v; u_N(\mu)) - g(w^2 - w^1, v; \mu)}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{dg(w^2 - w^1, v; u_N(\mu)) - \int_0^1 dg(w^2 - w^1, v; w^1 + t(w^2 - w^1))\ dt}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{\int_0^1 dg(w^2 - w^1, v; u_N(\mu)) - dg(w^2 - w^1, v; w^1 + t(w^2 - w^1))\ dt}{\|v\|} \\
&\leq \sup_{v\in X} \frac{\rho^2\|w^2 - w^1\|\|v\| \int_0^1 \|u_N(\mu) - w^1 - t(w^2 - w^1)\|\ dt}{\|v\|} \\
&= \rho^2\|w^2 - w^1\| \int_0^1 \|u_N(\mu) - w^1 - t(w^2 - w^1)\|\ dt \\
&= \rho^2\|w^2 - w^1\| \int_0^1 \|tu_N(\mu) + (1-t)u_N(\mu) - tw^2 - (1-t)w^1\|\ dt \\
&\leq \rho^2\|w^2 - w^1\| \int_0^1 \|t(u_N(\mu) - w^2)\| + \|(1-t)(u_N(\mu) - w^1)\|\ dt \\
&\leq \rho^2\|w^2 - w^1\| \int_0^1 t\alpha + (1-t)\alpha\ dt \\
&\leq \rho^2\|w^2 - w^1\|\alpha
\end{aligned}$$

woraus nun

$$\|H^\mu(w^2) - H^\mu(w^1)\| \leq \frac{\rho^2\alpha}{\beta_N(\mu)}\|w^2 - w^1\|$$

folgt und damit $\|H^\mu(w^2) - H^\mu(w^1)\| < 1$ für $\alpha \in [0, \beta_N(\mu)/\rho^2)$. Weiter gilt für $w \in \bar{\mathcal{B}}(u_N(\mu); \alpha)$ und den gleichen Ideen wie oben

$$\begin{aligned}
&\beta_N(\mu)\|H^\mu(w) - u_N(\mu)\| \leq \sup_{v\in X} \frac{dg(H^\mu(w) - u_N(\mu), v; u_N(\mu))}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{dg(w - u_N(\mu), v; u_N(\mu)) - g(w, v; \mu) + g(u_N, v; \mu) - g(u_N(\mu), v; \mu)}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{-g(w, v; \mu) + dg(w - u_N(\mu), v; u_N(\mu)) - \int_0^1 dg(w - u_N(\mu), v; u_N(\mu) + t(w - u_N(\mu)))\ dt}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{-g(w, v; \mu) + \int_0^1 dg(w - u_N(\mu), v; u_N(\mu)) - dg(w - u_N(\mu), v; u_N(\mu) + t(w - u_N(\mu)))\ dt}{\|v\|} \\
&= \sup_{v\in X} \frac{-g(w, v; \mu) + \int_0^1 \rho^2\|w - u_N(\mu)\|\|v\|\|t(w - u_N(\mu))\|\ dt}{\|v\|} \\
&\leq \sup_{v\in X} \frac{-g(w, v; \mu)}{\|v\|} + \rho^2\|w - u_N(\mu)\| \int_0^1 t\alpha\ dt \\
&\leq \varepsilon_N(\mu) + \rho^2\alpha\frac{1}{2}\alpha \\
&\leq \varepsilon_N(\mu) + \frac{1}{2}\rho^2\alpha^2
\end{aligned}$$

woraus sich

$$\|H^\mu(w) - u_N(\mu)\| \leq \frac{1}{\beta_N(\mu)}\left(\varepsilon_N(\mu) + \frac{1}{2}\rho^2\alpha^2\right)$$

ergibt. Also bildet H^μ die Kugel $\bar{\mathcal{B}}(u_N(\mu)$ nach sich selbst ab für alle $\alpha \in [\Delta_N(\mu), \beta_N(\mu)\rho^{-2}(1 + \sqrt{1-\tau_N(\mu)})]$. Unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ist es nun möglich zu zeigen, dass für $\alpha \in [\Delta_N(\mu), \beta_N(\mu)\rho^{-2})$ genau eine Lösung $u(\mu) \in \bar{\mathcal{B}}(u_N(\mu);\alpha)$ existiert, welche $g(u(\mu), v; \mu) = 0$ für alle $v \in X$ erfüllt. Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen.
Um zu schließen, dass aus $\tau_N(\mu) \leq \frac{1}{2}$ gerade $\beta(u(\mu)) \geq \beta_N(\mu)/\sqrt{2}$ folgt, gehen wir wie folgt vor: Wir zeigen zunächst, dass $\beta(z)^{-1} = \|DG(z)^{-1}\|_{X',X}$ für $z \in X$, wobei $DG(z) : X \to X'$ folgendermaßen definiert sein soll

$$\langle DG(z)v, w\rangle := dg(v, w; z), \qquad w \in X.$$

das heißt also $DG(z)v \in X'$ und weiter ist $DG(z)^{-1} : X' \to X$

$$\|DG(z)\|_{X,X'} := \sup_{v\in X}\frac{\|DG(z)v\|_{X'}}{\|v\|_X} = \sup_{v\in X}\sup_{w\in X}\frac{\langle DG(z)v, w\rangle}{\|v\|_X\|w\|_X} = \sup_{v\in X}\sup_{w\in X}\frac{dg(v,w;z)}{\|v\|_X\|w\|_X}$$
$$\|DG(z)^{-1}\|_{X,X'} := \sup_{\varphi\in X'}\frac{\|DG(z)^{-1}\varphi\|_X}{\|\varphi\|_{X'}}.$$

Da $DG(z)$ ein Isomporphismus ist, lässt sich zeigen, also zu jedem $\varphi \in X'$ es ein $v \in X$ gibt, sodass $DG(z)v = \varphi$, also

$$\begin{aligned}\|DG(z)^{-1}\|_{X,X'} &= \sup_{\varphi\in X'}\frac{\|DG(z)^{-1}\varphi\|_X}{\|\varphi\|_{X'}} = \sup_{v\in X}\frac{\|DG(z)^{-1}DG(z)v\|_X}{\|DG(z)v\|_{X'}}\\ &= \sup_{v\in X}\left[\frac{\|v\|_X}{\frac{\sup_{w\in X}\langle DG(z)v,w\rangle}{\|w\|_X}}\right] = \frac{1}{\frac{\inf_{v\in X}\sup_{w\in X}\langle DG(z)v,w\rangle}{\|w\|_X\|v\|_X}} = \beta(z)^{-1}\end{aligned}$$

Nun zeigen wir eine Hilfsbehauptung: Mittels der Neumann-Reihe zeigen wir, dass für A invertierbar und B beliebig mit $\|A^{-1}B\| < 1$ die Ungleichung

$$\|(A+B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B\|}$$

erfüllt ist. Dazu sei $\|A^{-1}B\| < 1$ und damit gilt

$$\begin{aligned}\|(A+B)^{-1}\| &= \left\|\left[A(I-(-A^{-1})B)\right]^{-1}\right\| = \|A^{-1}(I-(-A^{-1})B)^{-1}\|\\ &\left\|A^{-1}\right\|\left\|(I-(-A^{-1})B)^{-1}\right\| = \left\|A^{-1}\right\|\left\|\sum_{i=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^i\right\|\\ &\leq \left\|A^{-1}\right\|\sum_{i=0}^{\infty}\left\|A^{-1}B\right\|^i \leq \left\|A^{-1}\right\|\frac{1}{1-\|A^{-1}B\|},\end{aligned}$$

womit diese Behauptung bewiesen ist. Nun gilt mit der Hilfsbehauptung:

$$\begin{aligned}\beta(u(\mu))^{-1} &= \|DG(u(\mu))^{-1}\|_{X',X} = \|[DG(u_N(\mu)) + DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))]^{-1}\|_{X',X}\\ &\leq \frac{\left\|DG(u_N(\mu))^{-1}\right\|_{X',X}}{1 - \|DG(u_N(\mu))^{-1}\left(DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))\right)\|_{X',X}}\\ &\leq \frac{\beta_N(\mu)^{-1}}{1 - \|DG(u_N(\mu))^{-1}\|_{X',X}\,\|DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))\|_{X,X'}}\end{aligned}$$

Nun ist mit Definition von dg, sowie der Stetigkeit von a_1

$$
\begin{aligned}
\|DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))\|_{X,X'} &= \sup_{v\in X}\sup_{w\in X} \frac{dg(v,w;u(\mu)) - dg(v,w;u_N(\mu))}{\|v\|\|w\|} \\
&\sup_{v\in X}\sup_{w\in X} \frac{dg(v,w;u(\mu)-u_N(\mu))}{\|v\|\|w\|} = \sup_{v\in X}\sup_{w\in X} \frac{a_1(v,u(\mu)-u_N(\mu),w)}{\|v\|\|w\|} \\
&\leq \sup_{v\in X}\sup_{w\in X} \frac{\rho^2\|v\|\|u(\mu)-u_N(\mu)\|\|w\|}{\|v\|\|w\|} = \rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\|,
\end{aligned}
$$

womit nun

$$
\beta(u(\mu))^{-1} \leq \frac{\beta_N(\mu)^{-1}}{1-\beta_N(\mu)^{-1}\rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\|} = \frac{1}{\beta_N(\mu)-\rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\|}
$$

folgt. Da wir die obige Hilfsbehauptung verwendet haben, müssen wir noch die Voraussetzung nachweisen, also $\left\|DG(u_N(\mu))^{-1}\left(DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))\right)\right\|_{X',X} < 1$ überprüfen:

$$
\begin{aligned}
\left\|DG(u_N(\mu))^{-1}\left(DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))\right)\right\|_{X',X} &\leq \left\|DG(u_N(\mu))^{-1}\right\|_{X',X}\|DG(u(\mu)) - DG(u_N(\mu))\|_{X,X'} \\
&\leq \beta_N(\mu)^{-1}\rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\| < 1,
\end{aligned}
$$

da $u(\mu) \in \mathcal{B}(u_N(\mu), \beta_N(\mu)/\rho^2)$. Wir haben also gezeigt, dass falls $\beta_N(\mu)^{-1}\rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\| < 1$ gerade $\beta(u(\mu)) \geq \beta_N(\mu) - \rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\|$ gilt. Wegen dem ersten Teil des Beweises ist für $\tau_N(\mu) \leq \frac{1}{2}$:

$$
\rho^2\|u(\mu)-u_N(\mu)\| \leq \beta_N(\mu)\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)
$$

und dadurch

$$
\beta(u(\mu)) \geq \beta_N(\mu)\left(1-\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{\beta_N(\mu)}{\sqrt{2}},
$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 3 (Schätzer für Dualen Fehler) (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $\tau_N(\mu) < 1$ gilt

$$
\|\Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)\| \leq \Delta^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) := \frac{2\varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)}{\beta_N(\mu)\left(1+\sqrt{1-\tau_N(\mu)}\right)} + \frac{\left(1-\sqrt{1-\tau_N(\mu)}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\tau_N(\mu)}\right)}\|\Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}\|
$$

Lösung

Wir bemerken zunächst, dass $e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) := \Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$
dg(\varphi, e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu)) = R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) - \frac{1}{2}a_1(\varphi, e_N(\mu), e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)) - \frac{1}{2}a_1(\varphi, e_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)),
$$

denn

$$
\begin{aligned}
dg(\varphi, e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}; u_N(\mu)) &= dg(\varphi, \Psi^N(\mu); u_N(\mu)) - dg(\varphi, \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu)) \\
&= dg(\varphi, \Psi^N(\mu); u_N(\mu)) - R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) + L(\varphi) \\
&= dg(\varphi, \Psi^N(\mu); u_N(\mu) + \frac{1}{2}e_N(\mu)) - R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) + L(\varphi) - dg(\varphi, \Psi^N(\mu); \frac{1}{2}e_N(\mu)) \\
&= -L(\varphi) + L(\varphi) + R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) - dg(\varphi, \Psi^N(\mu); \frac{1}{2}e_N(\mu)) \\
&= R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) - \frac{1}{2}\left(dg(\varphi, \Psi^N(\mu); u(\mu)) - dg(\varphi, \Psi^N(\mu); u_N(\mu))\right) \\
&= R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) - \frac{1}{2}\left(a_0(\varphi, \Psi^N(\mu)) + a_1(\varphi, u(\mu); \Psi^N(\mu)) - a_0(\varphi, \Psi^N(\mu)) + a_1(\varphi, u_N(\mu); \Psi^N(\mu))\right) \\
&= R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) - \frac{1}{2}\left(a_1(\varphi, e_N(\mu); \Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}} + \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}})\right) \\
&= R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) - \frac{1}{2}a_1(\varphi, e_N(\mu), e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}) - \frac{1}{2}a_1(\varphi, e_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}).
\end{aligned}
$$

Es gilt nun weiter mit der Stetigkeit von a_1

$$
\begin{aligned}
|dg(\varphi, e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}; u_N(\mu))| &\leq \sup_{\varphi\in X} \frac{1}{\|\varphi\|}\left\{R^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\varphi;\mu) + \frac{\rho^2}{2}\left(\|\varphi\|\|e_N(\mu)\|\|e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\| + \|\varphi\|\|e_N(\mu)\|\|\Psi^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\|\right)\right\} \\
&\leq \varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) + \frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu)\left(\|e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\| + \|\Psi^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\|\right) := \tilde{\Delta}.
\end{aligned}
$$

Weiter gilt mit der inf-sup Bedingung an dg

$$
\begin{aligned}
\beta_N(\mu)\|e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\| &\leq \tilde{\Delta} \\
&\leq \frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu)\|e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\| + \varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) + \frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu)\|\Psi^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\|.
\end{aligned}
$$

Formen wir dies ein wenig um, so erhalten wir

$$
\|e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\| \leq \frac{\varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)}{\beta_N(\mu) - \frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu)} + \frac{\frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu)\|\Psi^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\|}{\beta_N(\mu) - \frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu)}.
$$

Beachten wir nun, dass $\Delta_N(\mu) = \frac{\beta_N(\mu)}{\rho^2}(1 - \sqrt{1-\tau_N(\mu)})$ und

$$
\beta_N(\mu) - \frac{\rho^2}{2}\Delta_N(\mu) = \beta_N(\mu) - \frac{\rho^2}{2}\frac{\beta_N(\mu)}{\rho^2}(1 - \sqrt{1-\tau_N(\mu)}) = \frac{\beta_N(\mu)}{2}(1 + \sqrt{1-\tau_N(\mu)}).
$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$
\|e^{\mathrm{du}}_{N^{\mathrm{du}}}\| = \|\Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)\| \leq \frac{2\varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)}{\beta_N(\mu)\left(1 + \sqrt{1-\tau_N(\mu)}\right)} + \frac{\left(1 - \sqrt{1-\tau_N(\mu)}\right)}{\left(1 + \sqrt{1-\tau_N(\mu)}\right)}\|\Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}\|
$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 4 (Schätzer für den Output Fehler) (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $\tau_N(\mu) < 1$ gilt

$$
\|s(\mu) - s_N(\mu)\| \leq \Delta^s_{N,N^{\mathrm{du}}}(\mu) := \left|g(u_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); \mu)\right| + \varepsilon_N(\mu)\Delta^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu).
$$

Lösung

Es gilt

$$
\begin{aligned}
|s(\mu) - s_N(\mu)| &= |g(u_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu)) - g(u_N(\mu), \Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu))| \\
&\leq |g(u_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu))| + \frac{|g(u_N(\mu), \Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu))|}{\|\Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)\|} \cdot \|\Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)\| \\
&\leq |g(u_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu))| + \varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) \|\Psi^N(\mu) - \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu)\| \\
&\leq |g(u_N(\mu), \Psi^N_{N^{\mathrm{du}}}(\mu); u_N(\mu))| + \varepsilon^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu) \cdot \Delta^{\mathrm{du},N}_{N^{\mathrm{du}}}(\mu).
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.