Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Theorie-Blatt 5
Lösung

(Abgabe am 23.06.2015 **vor** der Übung!)

Hinweise:
Siehe Theorie-Blatt 1/2.

Aufgabe 10 *(Integration, LaTeX)* (10 Punkte)

Es gilt

$$\log(x^2+1) = \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt.$$

Berechnen Sie hiermit $\log(5)$ näherungsweise

(i) unter Verwendung der Trapezsummenregel mit 4 Teilintervallen und

(ii) mit Hilfe der zusammengesetzten Simpson-Regel mit 2 Teilintervallen (d.h. zerlegen Sie das Intervall in zwei Teilintervalle und führen Sie auf jedem Intervall die Simpson-Regel durch).

Berechnen Sie für beide Methoden den relativen Fehler und vergleichen Sie beide Fehler. War das Ergebnis zu erwarten?

Lösung

Wir berechnen das Integral

$$\log(5) = \int_0^2 \frac{2t}{t^2+1}\,dt.$$

(a) Wir wählen die Stützstellen $t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1, t_3 = 1.5, t_4 = 2$ und erhalten

$$\log(5) \approx T(4) = h\left(\frac{f(0)}{2} + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \frac{f(2)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{4}{5} + 1 + \frac{13}{12} + \frac{2}{5}\right) = 1.5615.$$

(b) Wir wählen $I_0 = [0,1]$ und $I_1 = [1,2]$ und erhalten

$$\log(5) \approx \hat{I}(f) = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\right) + \frac{1}{6}\left(f(1) + 4f(1.5) + f(2)\right) = \frac{21}{13}$$

Für die relativen Fehler gilt:

$$\left|\frac{\log(5) - 1.5615}{\log(5)}\right| = 0.0298$$

$$\left|\frac{\log(5) - 21/13}{\log(5)}\right| = 0.0037$$

Der Fehler für die Simpson-Regel ist kleiner, was zu erwarten war, da die Simpson-Regel eine höhere Ordnung ($\mathcal{O}(h^5)$) hat, als die Trapez-Regel ($\mathcal{O}(h^3)$).

Aufgabe 11 *(Newton-Cotes Gewichte)* (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Gewichte ω_i der Newton-Cotes Formeln für die Knoten

$$x_0 = \frac{3a+b}{4}, \quad x_1 = \frac{2a+2b}{4}, \quad x_2 = \frac{a+3b}{4}.$$

Lösung
Für die Lagrange-Basisfunktionen gilt

$$\begin{aligned}
l_{0,2}(x) &= \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{8x^2-(6a+10b)x+(a+b)(a+3b)}{(a-b)^2}\\
l_{1,2}(x) &= \frac{(x-t_0)(x-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = \frac{-16x^2+(16a+16b)x-(3a+b)(a+3b)}{(a-b)^2}\\
l_{2,2}(x) &= \frac{(x-t_0)(x-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{8x^2-(10a+6b)x+(a+b)(3a+3)}{(a-b)^2}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Newton-Cotes-Gewichte:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{0,2}(x)\,dx = \ldots = \frac{2}{3}\\
\lambda_1 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{1,2}(x)\,dx = \ldots = -\frac{1}{3}\\
\lambda_2 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{2,2}(x)\,dx = \ldots = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12 *(Quadraturformel)* (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Quadraturformel der Form

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2), \tag{1}$$

mit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ und $0 < x_1 < x_2$, die alle Polynome $p \in \mathbb{P}_3$ exakt integriert. Verwenden Sie $\omega_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
(**Hinweis**: Betrachten Sie (1) für $f(x) = x^k$, $k = 0,1,2$ und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem.)
Lösung
Es gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k \, dx = k!.$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$k! = \omega_1 x_1^k + \omega_2 x_2^k, \quad , k = 0,1,2$$

also

$$\begin{aligned}
1 &= \omega_1 + \omega_2\\
1 &= \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2\\
2 &= \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\omega_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ und Lösen des Gleichungssystems ergibt

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}\\
x_1 &= 1 - \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = 2-\sqrt{2}\\
x_2 &= 1 + \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = 2+\sqrt{2}
\end{aligned}$$