Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Theorie-Blatt 6
Lösung

(Abgabe am 07.07.2015 **vor** der Übung!)

Hinweise:
Siehe Theorie-Blatt 1/2.

Aufgabe 13 *(Mehrdimensionale Integration)* (10+5 Punkte)

(i) Seien $(0,0),(1,0),(0,1) \in \mathbb{R}^2$ die Eckpunkte des Dreiecks D. Zeigen Sie, dass Gewichte $\omega_1,\dots,\omega_4$ existieren, sodass die Quadraturformel

$$\frac{1}{|D|}\int_D p(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \omega_1\,p(0,0)+\omega_2\,p(1,0)+\omega_3\,p(0,1)+\omega_4\,p(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})$$

von allen Polynomen

$$p \in \{q : D \to \mathbb{R} : q(x,y) = \alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}x+\alpha_{0,1}y+\alpha_{2,0}x^2+\alpha_{1,1}xy+\alpha_{0,2}y^2 \text{ mit } \alpha_{i,j}\in\mathbb{R}\}$$

erfüllt wird. Dabei ist $|D|$ der Flächeninhalt von D. Wie lauten die Gewichte ω_i?

(ii) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ die Eckpunkte eines Dreiecks T. Zeigen Sie, dass Gewichte $\omega_1,\dots,\omega_4$ existieren, sodass die Quadraturformel

$$\frac{1}{|T|}\int_T p(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \omega_1\,p(a)+\omega_2\,p(b)+\omega_3\,p(c)+\omega_4\,p\big(\tfrac{a+b+c}{3}\big)$$

von allen Polynomen

$$p \in \{q : T \to \mathbb{R} : q(x,y) = \alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}x+\alpha_{0,1}y+\alpha_{2,0}x^2+\alpha_{1,1}xy+\alpha_{0,2}y^2 \text{ mit } \alpha_{i,j}\in\mathbb{R}\}$$

erfüllt wird. Dabei ist $|T|$ der Flächeninhalt von T. Wie lauten die Gewichte ω_i?

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von (i), indem Sie T affin auf D abbilden.

Lösung

(i) Wir fordern die Exaktheit der Quadraturformel für die Polynome $1,\ x,\ x^2,\ y,\ y^2,\ xy$ und erhalten damit folgendes Gleichungssystem (Beachte:$|D| = \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned}
2\int_D 1\,dx &= 1 = \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4\\
2\int_D x\,dx &= \frac{1}{3} = \omega_2+\frac{1}{3}\omega_4\\
2\int_D x^2\,dx &= \frac{1}{6} = \omega_2+\frac{1}{9}\omega_4\\
2\int_D y\,dx &= \frac{1}{3} = \omega_3+\frac{1}{3}\omega_4\\
2\int_D y^2\,dx &= \frac{1}{6} = \omega_3+\frac{1}{9}\omega_4\\
2\int_D xy\,dx &= \frac{1}{12} = \frac{1}{9}\omega_4
\end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems ergibt

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega 3 = \frac{1}{12}; \quad \omega_4 = \frac{3}{4}.$$

(ii) Wir betrachten die affine Abbildung

$$\varphi : D \to T$$
$$\varphi(x,y) = x(b-a) + y(c-a) + a,$$

welche das Referenzdreieck D auf das allgemeine Dreieck T abildet. Es gilt

$$\det(D\varphi) = det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} = 2|T|.$$

Der Transfomationssatz liefert damit

$$\int_T p(x,y)\, d(x,y) = \int_D p(\varphi(x,y))|\det(D\varphi)|\, d(x,y) = \int_D p(x(b-a), y(c-a))|\det(D\varphi)|\, d(x,y).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{|T|}\int_T p(x,y)\, d(x,y) &= 2\int_D p(x(b-a), y(c-a)) d(x,y) \\ &= \underbrace{2|D|}_{=1}(\omega_1 p(\varphi(0,0)) + \omega_2 p(\varphi(1,0)) + \omega_3 p(\varphi(0,1)) + \omega_4 p(\varphi(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}))) \\ &= \omega_1 p(a) + \omega_2 p(b) + \omega_3 p(c) + \omega_4 p(\frac{a+b+c}{3}). \end{aligned}$$

Es gilt also die Quadraturformel aus der Aufgabenstellung mit den selben Gewichten wie in Teil (i).

Aufgabe 14 *(Gauss-Tschebyscheff-Quadratur)* (15 Punkte)

Die Tschebyscheff-Polynome sind die Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf dem Intervall $(-1,1)$, d.h.

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n > 0 \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Gewichte der Gauss-Tschebyscheff-Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\, f(x_k),$$

die für alle $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$ exakt ist.
Sie dürfen dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 7 und die Formel

$$\sum_{m=0}^{n-1}{}' \cos\left(m\frac{2k-1}{2n}\right)\cos\left(m\frac{2\nu-1}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, n, & \text{für} \quad \nu = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

verwenden. Dabei bedeutet $\sum'$, dass der erste Summand halbiert wird.

Lösung:
Da die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad $\leq 2n-1$ exakt ist gilt insbesondere für die Tschbyscheff-Polynome

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k T_m(x_k) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ \pi, & m = 0, \end{cases} \qquad m = 0, ..., n-1.$$

Mit der Definition der Tschebyscheff-Polynome und der Darstellung der Nullstellen erhalten wir dann

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \cos\left(m\frac{2k-1}{2n}\right) = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ \pi, & m = 0. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $\cos\left(m\frac{2\nu-1}{2n}\right)$ mit $\nu \in \{1,...,n\}$ und summieren über $m = 0,...,n-1$ (der erste Summand wird halbiert), dann erhalten wir

$$\sum_{m=0}^{n-1\,\prime} \cos\left(m\frac{2\nu-1}{2n}\right) \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cos\left(m\frac{2k-1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Vertauschen der Summation liefert dann

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1\,\prime} \cos\left(m\frac{2\nu-1}{2n}\right) \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cos\left(m\frac{2k-1}{2n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \omega_k \sum_{m=0}^{n-1\,\prime} \cos\left(m\frac{2\nu-1}{2n}\right) \cos\left(m\frac{2k-1}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, \frac{1}{2}\, n\, \delta_{\nu,k} \\ &= \omega_\nu \frac{1}{2} n.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir schliesslich $\omega_\nu = \frac{\pi}{n}$ für alle $\nu = 1,...,n$.