Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

Numerische Analysis - Matlab-Blatt 4

(Besprechung in den MATLAB-Tutorien in KW 23/24)

Hinweise:
Siehe MATLAB-Blatt 1/2.

Aufgabe 6 *(Dividierte Differenzen)* (5+5+5 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir die $(n+1)$-te Ableitung mittels dividierter Differenzen an mehreren Stellen x_k mit

$$x_k = a + k\,\varepsilon, \quad k = 0, ..., N.$$

approximieren ($N = \frac{b-a}{\varepsilon}$). Dazu verwenden wir die Identität

$$(n+1)!\,[x_0, ..., x_{n+1}]f = f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi \in \big[\ \min\{x_0, ..., x_{n+1}\}, \max\{x_0, ..., x_{n+1}\}\ \big].$$

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

(i) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
val = approxDeriv(x,fx,n),
```

die die Stützstellen $\mathtt{x} = (x_0, ..., x_N)$, die Funktionswerte `fx` und die Ordnung der Ableitung `n` als Eingabeparameter erhält. Die Funktion soll die dividierte Differenzen

$$(n+1)!\,[x_k, ..., x_{k+n}]f, \quad k = 0, ..., N-n$$

als Approximationen der Ableitung $f^{(n)}\left(\frac{x_k + x_{k+n}}{2}\right)$ berechnen und in dem Vektor `val` zurückgeben.

(ii) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `main.m`, in welchem Sie für eine gegebene Schrittweite $\mathtt{eps} = 10^{-2}$ die $(n+1)$-te Ableitung der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ mit der Funktion aus Aufgabe (i) auswerten und zusammen mit der exakten Ableitung in ein Schaubild plotten. Implementieren Sie die folgenden Beipsiele

- $f(x) = \cos(x)$, $n = 3$, $[a, b] = [0, 2\pi]$
- $f(x) = (\exp(1 - x^2) - 1)^{1/3}$, $n = 1$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$

(iii) Erweitern Sie das Skript aus Aufgabenteil (ii), sodass die $(n+1)$-te Ableitung für die Schrittweiten

```
eps=logspace(-4,-1,100)
```

sowie der maximale Fehler auf dem Intervall $[a, b]$ berechnet werden. Plotten Sie den maximalen Fehler über die Schrittweite `eps` in doppelt-logarithmischer Skala. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 6 *(Interpolationsfehler)* (4+3+3+5 Punkte)
Der Interpolationsfehler hängt stark von der Wahl der Stützstellen ab, denn es gilt

$$|f(x) - P(f|x_0, ..., x_n)| \leq \frac{|(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)|}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)|, \quad \xi \in [\min(x_0, ..., x_n), \max(x_0, ..., x_n)].$$

Im Folgenden wollen wir den Term

$$\omega_{n+1}(x) := (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

für verschiedene Arten von Stützstellen numerisch untersuchen.

(i) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches $\omega_{n+1}(x)$ auf dem Intervall $[-1,1]$ für

- ein äquidistantes Gitter $x_k = -1 + (k-1)\frac{2}{n-1}$ $(k = 1, ..., n)$
- die Tschebyscheff-Nullstellen $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ $(k = 1, ..., n)$
- eine graduiertes Gitter $x_k = -1 + \left(\frac{k}{\frac{n}{2}+1}\right)^\beta$, $x_{k+\frac{n}{2}} = 1 - \left(\frac{k}{\frac{n}{2}+1}\right)^\beta$, $\beta = 2$, n gerade, $(k = 1, ..., \frac{n}{2})$

und $n = 30$ plottet. Sie dürfen zur Auswertung von $\omega_{n+1}(x)$ die Funktion `hornerNewton.m` aus Aufgabe 4 verwenden. Zeichnen Sie eine Legende ein. Welche Stützstellen sind am Besten? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 5.

(ii) Erweitern Sie das Skript, sodass für $n \in \left\{2^1, ..., 2^{10}\right\}$ jeweils der maximale Wert

$$M(n) := \max_{x\in[-1,1]} |\omega_{n+1}(x)|$$

bestimmt wird (Verwenden Sie dazu `x=linspace(-1,1,10000)`). Plotten Sie anschließend den maximalen Wert $M(n)$ über n in einer semi-logarithmischen Skala (`semilogy`). Was fällt Ihnen auf?

(iii) Bestimmen Sie numerisch die Konvergenzrate für alle drei Arten von Stützstellen, d.h. bestimmen Sie die konstante $0 < C < 1$ mit

$$M(n) \approx C^{n+1}.$$

Vergleichen Sie ie Ergebnisse mit den theoretischen Aussagen, die Sie kennen.

(iv) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches den optimalen Parameter $\beta \in [1, 2.5]$ für das graduierte Gitter besstimmt. Legen Sie sich dazu äquidistante Werte für β an, berechnen Sie für jedes dieser β den maximalen Fehler $M(512)$ und plotten Sie $M(512)$ über β. Lassen Sie sich zusätzlich den Wert von β ausgeben, der $M(512)$ minimiert. Setzen Sie den optimalen Parameter von β in das Skript aus Augabenteil (ii) ein.