Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

SoSe 2017
Blatt 02
28.04.2017

Angewandte Numerik 1

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 08.05.2017 bis 12.05.2017

Für dieses Übungsblatt gibt es 31 Theorie- und 7 Matlab-Punkte, sowie 9 Theorie- und 0 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 02) bei 27,0 Theoriepunkten und 13,8 Matlabpunkten.

Aufgabe 5 *(Umwandlung in und Operationen auf Maschinenzahlen)* (2T+2T+5T Punkte)

Gegeben seien die beiden Zahlen $x = (\frac{3}{5})_{10}$ und $y = (\frac{4}{7})_{10}$

a) Bestimmen Sie für x und y jeweils die normalisierte Gleitpunktdarstellung zur Basis $b = 2$.

b) Bestimmen Sie die Darstellungen $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ von x und y jeweils in $\mathbb{M}(2,5,3)$ und $\mathbb{M}(2,3,3)$. Runden Sie mit Standardrundung, falls die Zahlen nicht exakt darstellbar sind.

c) Berechnen Sie jeweils in $\mathbb{M}(2,5,3)$ und in $\mathbb{M}(2,3,3)$ $x \ominus y$. Wie groß ist der jeweilige absolute und der jeweilige relative Fehler? Wie heißt das beobachtete Phänomen?

Aufgabe 6 *(Maschinenzahlen und das Assoziativ- sowie das Distributivgesetz)* (1T+3T+2T+1T+1T*+1T*+2T*+1T* Punkte)

a) Betrachten Sie die Menge $\mathbb{M}(10,4,1)$ der Maschinenzahlen zur Basis 10 mit 4-stelliger Mantisse und 1-stelligem Exponent. Seien $x = 20170$, $y = 3$ und $z = 4$.

   i) Berechnen Sie $(x + y) + z$ und $x + (y + z)$ jeweils in exakter Arithmetik.
   ii) Geben Sie die Darstellungen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ von x, y und z in der Menge $\mathbb{M}(10,4,1)$ an.
   iii) Betrachten Sie nun die Addition $\oplus$ in der Menge der Maschinenzahlen. Berechnen Sie $(x \oplus y) \oplus z$ und $x \oplus (y \oplus z)$.
   iv) Gilt für Maschinenoperationen das Assoziativgesetz?

b) Nun betrachten wir die Menge $\mathbb{M}(10,3,1)$ der Maschinenzahlen zur Basis 10 mit 3-stelliger Mantisse und 1-stelligem Exponent. Seien nun $x = 0,124 \cdot 10^2$ und $y = 0,123 \cdot 10^2$.

   i) Berechnen Sie $(x - y)$, $(x - y) \cdot (x - y)$ und $(x \cdot x) - (x \cdot y) - (y \cdot x) + (y \cdot y)$ jeweils in exakter Arithmetik.
   ii) Geben Sie die Darstellungen $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ von x und y in der Menge $\mathbb{M}(10,3,1)$ an.
   iii) Berechnen Sie $(x \ominus y) \otimes (x \ominus y)$ und $(x \otimes x) - (x \otimes y) - (y \otimes x) + (y \otimes y)$.
   iv) Gilt für Maschinenoperationen das Distributivgesetz?

Aufgabe 7 *(Unterschied zwischen Kondition und Stabilität)*

(2T+2T+2T+2T+2T+1T+3M+4M+2T Punkte)

Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p^2 \geq -q$ (also $p^2 + q \geq 0$) sollen die Lösungen $x_1 \leq x_2$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2px - q = 0$$

berechnet werden.

a) Betrachten wir zunächst nur die Berechnung der größeren Nullstelle x_2.

  i) Berechnen Sie die Konditionszahlen κ_p und κ_q.

  ii) Erklären Sie Ihren Kommilitonen und Ihrem Tutor, für welche p und welche q das Problem der Berechnung der größeren der beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung gut konditioniert ist. Für welche p und welche q ist das Problem schlecht konditioniert?

  iii) Geben Sie ein konkretes gut konditioniertes und ein konkretes schlecht konditioniertes Beispiel an. Wie lauten die Konditionszahlen κ_p und κ_q für diese Beispiele?

  iv) Skizzieren Sie beide Beispiele. Wie können Sie sich die Bedeutung der Konditionszahl anhand Ihrer Skizzen veranschaulichen?

b) Betrachten wir nun den Fall $q > 0$. Begründen Sie, dass die quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen hat und dass man bei Verwendung der üblichen Formel $x_{1/2} = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$ auf Auslöschung achten muss. Unter welchen Bedingungen tritt Auslöschung auf?

c) Zeigen Sie: $x_1 x_2 = -q$ und $x_1 + x_2 = -2p$.

d) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[x1, x2] = nst(p, q)`, die x_1 und x_2 mit der üblichen Formel aus Aufgabenteil b) berechnet, sowie eine Matlab-Funktion `[x1, x2] = nstStabil(p, q)`, die x_1 und x_2 mit einem numerisch stabilen Algorithmus berechnet.

e) Schreiben Sie ein Matlab-Skript, das die Nullstellen $x_{1/2}$ mit Ihren Matlabfunktionen aus Aufgabenteil d) für $q = 1$ und viele verschiedene Werte p berechnet. Wählen Sie dazu $p = 10^t$, wobei $t = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 12$. Berechnen Sie die relativen Fehler in x_1 und x_2 und plotten Sie im von Auslöschung betroffenen Fall die relativen Fehler doppelt logarithmisch über p (Matlab-Befehl `loglog`).

   Führen Sie Ihre Berechnungen auch für negative Werte p (also $p = -10^t$) durch und plotten Sie wieder die relativen Fehler des von Auslöschung betroffenen Falls doppelt logarithmisch (jetzt über $|p|$).

   Interpretieren Sie Ihre Schaubilder.

f) Erklären Sie die Begriffe „Kondition“ und „Stabilität“.

Aufgabe 8 *(Aufwand zur Berechnung von Vektor- und Matrix-Multiplikationen)* (2T+2T*+2T* Punkte)

Seien im Folgenden $x, y \in \mathbb{R}^n$ zwei Spaltenvektoren und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen.

a) Wie viele Additionen und Multiplikationen werden zur Berechnung des Vektor-Vektor-Produkts $x^T y$ benötigt. Geben Sie die Zahl der Operationen in $\mathcal{O}$-Notation an.

b) Geben Sie auch die Zahl der zur Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts Ax benötigten Additionen und Subtraktionen an. Wie können Sie den benötigten Aufwand in $\mathcal{O}$-Notation angeben?

c) Wie viele Additionen und Multiplikationen benötigen Sie zur Berechnung des Matrix-Matrix-Produkts AB? Wie groß ist der Aufwand in $\mathcal{O}$-Notation?

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt02** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.