Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

SoSe 2017
Blatt 05
19.05.2017

Angewandte Numerik 1

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 29.05.2017 bis 02.06.2017

Für dieses Übungsblatt gibt es 21 Theorie- und 13 Matlab-Punkte, sowie 4 Theorie- und 6 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 05) bei 66,6 Theoriepunkten und 48,0 Matlabpunkten.

Aufgabe 20 *(Programmieraufgabe: Lineares Ausgleichsproblem)* (4T+4M+2M Punkte)

Die Höhe des Wasserstandes in der Nordsee wird hauptsächlich durch die so genannte M_2-Tide bestimmt, deren Periode ca. 12 Stunden beträgt. Die Höhe des Wasserstandes h kann daher durch die Funktion

$$h(t) = x_1 + x_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + x_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

beschrieben werden (t in Stunden). Zur Bestimmung von x_1, x_2 und x_3 sind bei Helgoland folgende Messungen durchgeführt worden:

t_i	0	2	4	6	8	10	Std.
h_i	1.9	3.0	2.6	1.1	0.4	1.5	Meter

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$. Geben Sie die Matrix A und die Vektoren x und b explizit an. Welche Dimensionen haben A, x und b?

b) Lösen Sie dieses lineare Ausgleichsproblem mittels Matlab. Der Befehl zum Lösen eines Gleichungssystems $Ax = b$ lautet `x = A\b`. Informieren Sie sich in der Matlab-Dokumentation darüber, welche Bedeutung der Matlab-Operator \ im Falle eines über- oder unterbestimmten linearen Gleichungssystems $Ax = b$ hat. Fertigen Sie mit Matlab eine Skizze an, in der die Ausgleichsfunktion und die Messdaten eingezeichnet sind.

c) Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch die Fehler der Lösung des Ausgleichsproblems gegenüber den Messwerten ein und berechnen Sie die Summe der Fehlerquadrate.

Aufgabe 21 *(Die Gaußsche Normalengleichung)* (4T+4T Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix, $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Erklären Sie, warum und wie man das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ mit Hilfe der Gaußschen Normalengleichung lösen kann. Welches numerische Verfahren, das Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben, wenden Sie dabei zur Lösung des auftretenden linearen Gleichungssystems an? Warum?

b) Stellen Sie für das lineare Ausgleichsproblem aus Aufgabe 20 die Gaußsche Normalengleichung auf und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem von Hand. Sie müssen dabei zur Lösung des auftretenden linearen Gleichungssystems nicht das in Aufgabenteil a) genannte Verfahren anwenden. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der in Aufgabe 20 mit Matlab berechneten Lösung.

Aufgabe 22 *(Programmieraufgabe: Die QR-Zerlegung)* (4T+4M+3M+3M* Punkte)

a) Sei wiederum $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix, $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Erklären Sie, warum und wie man das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ mit Hilfe der QR-Zerlegung der Matrix A lösen kann. Welche Dimensionen haben die Matrizen Q und R?

b) Betrachten Sie wieder das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ aus Aufgabe 20 und erweitern Sie Ihr Matlab-Skript aus Aufgabe 20:

   i) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[x, uR] = solveQR(Q, R, b)`, die zu einer orthogonalen Matrix `Q`, einer oberen Dreiecksmatrix `R` und einem Vektor `b` die Lösung `x` sowie das unvermeidbare Residuum `uR` des linearen Ausgleichsproblem $\|QRx - b\|_2 \to \min$ zurück gibt.

   ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Matlab-Funktion `[Q, R] = qr(A)` die QR-Zerlegung der Matrix A. Lösen Sie mit Hilfe der Matrizen `Q` und `R` und Ihrer Matlab-Funktion `solveQR` das lineare Ausgleichsproblem und vergleichen Sie die so erhaltene Lösung x^* mit der in Aufgabe 20 berechneten Lösung.

   iii) Berechnen Sie das unvermeidbare Residuum $\|Ax^* - b\|_2^2$ auch durch die Formel $Ax^* - b$ und vergleichen Sie sowohl diesen Wert als auch den mit Hilfe der QR-Zerlegung der Matrix A berechneten Wert mit der in Aufgabe 20 berechneten Summe der Fehlerquadrate.

Aufgabe 23 *(Programmieraufgabe: Kondition und Normalengleichung)* (4M*+3T* Punkte)

a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript `testNormalengleichung`, in dem Sie für $n = (1, \ldots, 9)$ jeweils die Matrix A_n und den Vektor b_n durch `An = [hilb(n); hilb(n)];` und `bn = rand(2*n,1);` definieren. Berechnen Sie mit dem Backslash-Operator jeweils eine Lösung `xn = An\bn` des linearen Ausgleichsproblems $\|A_n x - b_n\|_2 \to \min$. Sie können annehmen, dass dies die exakte Lösung ist. Berechnen Sie außerdem einerseits mit Hilfe der Normalengleichung und andererseits mit Hilfe der QR-Zerlegung jeweils eine Lösung und plotten Sie jeweils die relativen Fehler logarithmisch über n.

b) Was stellen Sie fest? Woran liegt das?
Hinweis: Betrachten Sie jeweils die Kondition der Matrix $A_n^T A_n$, die Sie sich mit dem Matlab-Befehl `cond(An'*An)` ausgeben lassen können.

Aufgabe 24 *(Noch ein lineares Ausgleichsproblem?)* (1T+4T Punkte)

Das Abkühlen eines festen Körpers kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden

$$T(t) = T_u + a\, e^{-b\, t}.$$

Dabei ist

- $T(t)$ die Temperatur zum Zeitpunkt t,
- T_u die (konstante) Umgebungstemperatur,
- a eine unbekannte systemabhängige Konstante und
- b eine unbekannte Materialkonstante.

Die beiden unbekannten Konstanten a und b sollen experimentell bestimmt werden. Dazu werden durch ein Experiment zu den Zeitpunkten t_i für $i \in \{1, ..., m\}$ bei konstanter Umgebungstemperatur T_u die Temperaturwerte T_i des festen Körpers gemessen.

a) Lässt sich dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem formulieren und mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate lösen?

b) Begründen Sie Ihre Aussage. Geben Sie dazu die Formulierung des linearen Ausgleichsproblems sowie die auftretende Matrix und die auftretenden Vektoren explizit an. Welche Dimensionen haben dann die Matrix und die Vektoren? Oder erklären Sie detailliert, woran die Formulierung als lineares Ausgleichsproblem scheitert.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt05** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.