Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Einführung in numerische Methoden der Strömungsmechanik
SS 2017

Übungsblatt 1

(Besprechung Do. 27.04. 2017.)

Allgemeine Vorgaben:

- Zum Bestehen der Vorleistung sind 50 Prozent der Übungspunkte notwendig (Votiersystem). Zudem muss mindestens ein Mal vorgerechnet werden.
- Es besteht Anwesenheitspflicht.
- Wird eine Aufgabe fälschlicherweise als bearbeitet angekreuzt, wird das gesamte Übungsblatt mit 0 Punkten bewertet.
- Die Programmieraufgaben sollen bis 18:00 Uhr am Vortag der Übung abgegeben werden. Die Benennung des zip-files ist `BlattXName1Name2.zip`.
- Programmieraufgaben können einzeln oder zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (3+7)

Für $d \in \mathbb{N}$ betrachten wir die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung ohne äußere Kraft $\mathbf{f}$ und mit Viskosität $\nu = 1$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei sind $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (hinreichend glatt) die gesuchten Lösungen.

(a) Zeige: Sind $\mathbf{u}$ und p Lösungen von (1), so auch $\tilde{\mathbf{u}}$ und $\tilde{p}$, wobei

$$\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x} - \mathbf{z}t) + \mathbf{z},\ \tilde{p}(t, \mathbf{x}) = p(t, \mathbf{x} - \mathbf{z}t), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$ [1]

(b) Sei $\lambda > 0$ und seien $\mathbf{u}$ und p Lösungen von (1). Finde Zahlen $a, b, c, e \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(\lambda)}(t, \mathbf{x}) &= \lambda^a \mathbf{u}(\lambda^b t, \lambda^c \mathbf{x}) \\ p^{(\lambda)}(t, \mathbf{x}) &= \lambda^e p(\lambda^b t, \lambda^c \mathbf{x}) \end{aligned}$$

ebenfalls Lösungen von (1) sind.

Aufgabe 2 (10)

Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und sei $f \in C(\Omega)$. Wir suchen eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, die das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta \cdot \nabla u + 2u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

löst. Diese soll näherungsweise mit der FDM[2] berechnet werden. Gehe hierzu wie folgt vor:

- Definiere ein äquidistantes Gitter auf $\overline{\Omega}$ mit $N^2 \in \mathbb{N}$ inneren Punkten und Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$ und setze
$$(x_i, y_j) = (ih, jh), \qquad i, j = 0, \ldots, N+1.$$
- Überlege, wie die FDM-Matrizen für die Terme $\beta \cdot \nabla u$ und $2u$ aussehen. Gehe hierzu analog zur Herleitung der Matrix für den Laplace-Operator (Satz von Taylor) vor. Überlege dir, welche Konvergenzordnung der FDM sich aus der Herleitung ergeben sollte.

(a) Schreibe ein Skript, das die obige Gleichung mit der FDM löst.

(b) Sei die exakte Lösung $u(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Berechne in Abhängigkeit der Maschenweise h den Fehler zwischen der exakten und numerischen Lösung in der Supremums-Norm und stelle den Fehler graphisch dar.

---

[1] In der Physik wird diese Eigenschaft Galilei-Invarianz genannt.
[2] Wir nehmen an, dass sogar $u \in C^4(\Omega)$ gilt.