Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm



# Übungsblatt 10

(Besprechung Do. 29.06.2017)

Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\Gamma$, $T > 0$ und seien $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten das Problem: Finde $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{in } (0,T] \times \Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{auf } [0,T] \times \Gamma, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Sei $V_h = \mathbb{P}^1$. Die Diskretisierung der Gleichung (1) lautet: Finde $u_h(t,x) = \sum_i u_{h,i}(t)\varphi(x)$ mit

$$\partial_t(u_h, v_h) + (\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \qquad \text{für alle } v_h \in V_h,$$

bzw.

$$\mathbf{M}\partial_t \mathbf{u}(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Hierbei seien $\mathbf{M} = (\varphi_j, \varphi_i)_{i,j}$ die Massematrix, $\mathbf{A}$ die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{f}(t) = (f(t,\cdot), \varphi_i)_i$, $\mathbf{u}_0 = (u_u(\cdot), \varphi_i)_i$.
Zur Diskretisierung in der Zeit verwenden wir das $\theta$-Verfahren:
Sei $0 = t_0 < \cdots < t_N = T$, $N \in \mathbb{N}$, $k_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \ldots, N-1$ und setze $\mathbf{u}_i = u(t_i, \cdot)$, $i = 0, \ldots, N$. Für $\theta \in [0,1]$ berechne

$$(\mathbf{M} + k_i\theta\mathbf{A})\mathbf{u}_{i+1} = (\mathbf{M} - k_i(1-\theta)\mathbf{A})\mathbf{u}_i + k_i(1-\theta)\mathbf{f}(t_i) + k_i\theta\mathbf{f}(t_{i+1}).$$

**Aufgabe 1** (15)

(a) Schreiben Sie eine Funktion, die obige Gleichung mit dem $\theta$-Verfahren für gegebene Funktionen $f$ und $u_0$ löst.

(b) Sei $T = 1$. Testen Sie Ihre Funktionen anhand der analytischen Lösung

$$u(t,x,y) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

für $\theta = 0$ (explizites Euler-Verfahren), $\theta = 1$ (implizites Euler-Verfahren) und für $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolson-Verfahren).