Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 2

(Besprechung Di. 09.05.2017)

Aufgabe 1 (3+4+3)

Häufig führt die Diskretisierung der PDEs der Strömungsmechanik (wie etwa beim Stokes-Problem) auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch und positiv definit ist und dass $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vollen Rang n hat, wobei $m \geq n$ gelte.
Seien $0 < \lambda_{\min} \leq \cdots \leq \lambda_{\max}$ die Eigenwerte von A und $0 < \sigma_{\min} \leq \cdots \leq \sigma_{\max}$ die Singulärwerte von B.

(a) Sei $\mu > 0$ ein positiver Eigenwert von $\mathbf{A}$. Zeige, dass $\mu \geq \lambda_{\min}$ gilt.
Hinweis: Sei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor. Multipliziere die zwei aus (1) resultierenden Gleichungen jeweils von links mit x bzw. y.

(b) Sei $\mu > 0$ ein positiver Eigenwert von $\mathbf{A}$. Zeige, dass $\mu \leq \frac{1}{2}\left(\lambda_{\max} + \sqrt{\lambda_{\max}^2 + 4\sigma_{\max}^2}\right)$ gilt.

(c) Ähnlich kann man zeigen, dass für das gesamte Spektrum $\sigma(\mathbf{A})$ von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \left[\frac{1}{2}\left(\lambda_{\min} - \sqrt{\lambda_{\min}^2 + 4\sigma_{\max}^2}\right), \frac{1}{2}\left(\lambda_{\max} - \sqrt{\lambda_{\max}^2 + 4\sigma_{\min}^2}\right)\right] \cup \left[\lambda_{\min}, \frac{1}{2}\left(\lambda_{\max} + \sqrt{\lambda_{\max}^2 + 4\sigma_{\max}^2}\right)\right].$$

Diese Abschätzung ist scharf, d.h. es gibt Beispiele für Matrizen A, B, sodass Eigenwerte auf den jeweiligen Intervallgrenzen liegen.
Diskutiere die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ im Zusammenhang mit der obigen Abschätzung.

Aufgabe 2 (4+6)

Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2$, wobei $\Gamma_1 = [0,1] \times \{1\}$ und $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$. Wir suchen ein Vektorfeld $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und eine Funktion p, die das folgende Dirichlet-Problem lösen:

$$\begin{cases} -\Delta u + \partial_x p = 0, \\ -\Delta v + \partial_y p = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Schreibe ein Skript, das die Stokes-Gleichung für die obigen Daten löst. Verwende hierbei, wie auf dem letzten Übungsblatt zentrale Differenzen, wobei $\mathbf{u}$ und p an den selben Stellen berechnet werden sollen.
Was fällt beim Druck p auf?

(b) Schreibe ein Skript, das das obige Problem mit dem MAC-Schema löst und vergleiche das Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe (a).

Hinweis: Verwende zum Plotten von Vektorfeldern den Befehl `quiver`.