Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 3

(Besprechung Do. 11.05.2017)

Aufgabe 1 (1+1+8)

Wir betrachten das folgende Randwertproblem in einer Dimension: Seien $\Omega = (0,1)$ und $a, f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Finde u, sodass

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[a(x)u'(x)\right] = f(x), & \text{in } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Leite die Variationsformulierung für das Problem (1) her.

Seien $m > 1,\ h = \frac{1}{m}$ und setze $x_i = ih,\ i = 0, \dots, m$. Sei V_h der Raum der linearen Splines bzgl. der Knoten $x_i,\ i = 1, \dots, m-1$.

(b) Überführe das Problem aus Teilaufgabe (a) in ein diskretes Problem der Form $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$. Welche Gestalt haben die Einträge der Matrix $\mathbf{A}$ und der rechten Seite $\mathbf{f}$?

(c) Schreibe eine Funktion, die für gegebene Funktionen a, f das Problem (1) löst. Teste die Funktion an einer von dir vorgegebenen analytischen Lösung.

Aufgabe 2 (8+2)

Sei im Folgenden die Notation wie in Aufgabe 1.

Wir betrachten das folgende *nichtlineare* Randwertproblem in einer Dimension: Seien $\Omega = (0,1)$ und $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Finde u, sodass

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[a(u)u'(x)\right] = f(x), & \text{in } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ähnlich wie in Aufgabe 1 leitet man das diskrete Problem

$$\text{Finde } u_h \in V_h : \qquad \int_\Omega a(u_h) u_h' v_h' \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx \qquad \text{für alle } v_h \in V_h$$

her, das in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A(u)u} = \mathbf{f}$$

lautet. Zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems verwenden wir die einfache Fixpunktiteration

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}(\mathbf{u}_{k-1})^{-1}\mathbf{b}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

wobei $\mathbf{x}_0$ beliebig ist.

(a) Schreibe eine Funktion, die für gegebene Funktionen a, f das obige Problem löst. Teste die Funktion an einer von dir vorgegebenen analytischen Lösung.

(b) Seien $f(x) = 1,\ a_1(u) = 0.05$ und $a_2(u) = 0.05 + |u - 0.3|$. Vergleiche die jeweiligen Lösungen.