Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Einführung in numerische Methoden der Strömungsmechanik
SoSe 2017

Übungsblatt 4

(Besprechung Do. 18.05.2017)

Für ein Dreieck $T := \operatorname{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten P_1, P_2, P_3 definieren wir die affine Abbildung Q_T, die das Referenzelement auf das Dreieck T abbildet, durch

$$Q_T : \hat{T} \to T$$

mit $Q_T(0,0) = P_1$, $Q_T(1,0) = P_2$ und $Q_T(0,1) = P_3$. Die Abbildung Q_T ist dadurch eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$Q_T(\xi,\eta) = b + B\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}x_2 - x_1 & x_3 - x_1\\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1\end{pmatrix}, \qquad P_i = \begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3.$$

Die Umkehrabbildung $Q_T^{-1} : T \to \hat{T}$ mit

$$Q_T^{-1}(x,y) = B^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - B^{-1}b, \qquad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in T, \qquad Q_T^{-1}(T) = \hat{T}$$

ist durch

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}y_3 - y_1 & x_1 - x_3\\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(B) = x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2$$

gegeben, oder genauer:

$$Q_T^{-1}(x,y) = \frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y - x_1y_3 + x_3y_1\\ (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die Basisfunktionen φ_i, $1 \le i \le 3$, auf dem Dreieck T die Darstellungen

$$\varphi_1(x,y) = \left(\hat{\varphi}_1 \circ Q_T^{-1}\right)(x,y) = \frac{(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2}{\det(B)},$$

$$\varphi_2(x,y) = \left(\hat{\varphi}_2 \circ Q_T^{-1}\right)(x,y) = \frac{(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y - x_1y_3 + x_3y_1}{\det(B)},$$

$$\varphi_3(x,y) = \left(\hat{\varphi}_3 \circ Q_T^{-1}\right)(x,y) = \frac{(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1}{\det(B)}.$$

Außerdem definieren wir für $0 \le \xi, \eta \le 1,\ \xi + \eta \le 1$ die Basis-Funktionen $\hat{\varphi}_i$ auf dem Referenzelement $\hat{T}$ durch

$$\hat{\varphi}_1(\xi,\eta) := 1 - \xi - \eta, \qquad \hat{\varphi}_2(\xi,\eta) := \xi, \qquad \hat{\varphi}_3(\xi,\eta) := \eta$$

und die Basisfunktionen φ_i auf dem Dreieck T durch $\varphi_i := (\hat{\varphi}_i \circ Q_T^{-1}),\ i = 1,2,3$ (es gilt also $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$).

Aufgabe 1 (3+3+4)

Berechne die folgenden Integrale für $i,j = 1,2,3$ und $\beta \in \mathbb{R}^2$:

(i) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)\,d(x,y)$, (ii) $\displaystyle\int_T \nabla\varphi_i(x,y)^T\nabla\varphi_j(x,y)\,d(x,y)$,

(iii) $\displaystyle\int_T \beta\cdot\nabla\varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)d(x,y)$.

Aufgabe 2 (10)

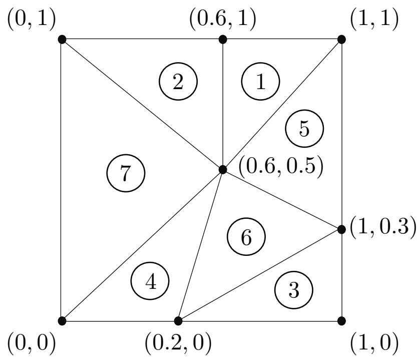
Wir betrachten erneut das Problem von Blatt 1: Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und sei $\beta = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta\cdot\nabla u + 2u = f & \text{in } \Omega\\ u = 0 & \text{auf } \Gamma.\end{cases}$$

Dazu führen wir zunächst ein Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von Ω ein. Die Triangulierung wird über folgende Datenstrukturen definiert:

- `coordinates`$\in \mathbb{R}^{n_C\times 2}$: Jede Zeile in `coordinates` enthält die Koordinaten eines Knotens/Eckpunktes (also n_C Knoten).
- `elements`$\in \mathbb{R}^{n_E\times 3}$: Jede Zeile in `elements` enthält die Indizes/Zeilen der drei Eckpunkte eines Dreiecks in `coordinates` (also n_E Elemente).
- `dirichlet`$\in \mathbb{R}^{n_D\times 2}$: Jede Zeile in `dirichlet` enthält die Indices der zwei Eckpunkte einer Randkante in `coordinates` (also n_D Randkanten).

Mache dir die Datenstrukturen an folgendem kleinen Beispiel klar:



$$\texttt{coordinates} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \texttt{elements} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \texttt{dirichlet} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \\ 8 & 7 \\ 7 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Lade das Material von der Homepage herunter.

(ii) Wie lautet die Variationsformulierung des obigen Problems?

(iii) Schreibe ein Skript, das für obiges Problem die entsprechenden Matrizen und die rechte Seite aufstellt. Verwende hierfür Aufgabe 1 und für nicht exakt exakt berechenbare Integrale die folgende Näherungen (Mittelpunktsregel)

$$\int_T f\,\varphi_j\;dx \approx f(x_S,y_S)\int_T \varphi_j\;dx = f(x_S,y_S)\,\frac{1}{6}\,\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix},$$

wobei (x_S, y_S) den Schwerpunkt des Dreiecks $T\in\mathcal{T}_h$ bezeichne.

(iv) Vergleiche für die exakte Lösung $u(x,y)=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ das Ergebnis mit dem des ersten Blattes.