Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm



# Übungsblatt 5

(Besprechung Di. 30.05.2017)

Auf dem Referenzdreieck $\hat{T} := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} : 0 \leq \xi, \eta \leq 1,\ \xi + \eta \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ definieren wir die Basisfunktionen (baryzentrische Koordinaten) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ durch

$$\lambda_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \qquad \lambda_2(\xi,\eta) = \xi, \qquad \lambda_3(\xi,\eta) = \eta, \qquad \psi_1 = 4\lambda_1\lambda_2, \qquad \psi_2 = 4\lambda_2\lambda_3, \qquad \psi_3 = 4\lambda_1\lambda_3.$$

Außerdem definieren wir auf dem Referenz-Dreieck die *bubble*-Funktion

$$b(\xi,\eta) = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Für ein beliebiges Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$ seien die entsprechenden Basisfunktionen wie auf Blatt 4 definiert und werden im Folgenden ebenfalls mit $\lambda_1, \dots, \lambda_3, b$ bezeichnet.

**Aufgabe 1**[$(P1 + Bubble)$] (10)

Wir betrachten erneut das : Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

mit Variationsformulierung: Finde $u$, sodass

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega f v \; dx \qquad \text{für alle } v.$$

Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega$. Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 &:= \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \operatorname{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ \mathbb{B} &:= \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \operatorname{span}\{b\} \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_h &= \mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Dies führt auf das diskrete Problem: Finde $u_h \in V_h$, sodass

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h \; dx = \int_\Omega f v_h \; dx \qquad \text{für alle } v_h \in V_h. \tag{1}$$

(a) Überlegen Sie sich eine sinnvolle Datenstruktur für die Basisfunktionen, sodass die Steifigkeitsmatrix eine Blockmatrix ist.

(b) Schreiben Sie ein Skript, das für eine gegebene Funktion $f$ das obige Problem löst. Dabei sollen die Quadraturpunkte auf dem Referenzdreieck so gewählt sein, dass die Basisfunktionen exakt integriert werden.

(c) Testen Sie ihr Skript mit einer bekannten analytischen Lösung.

**Aufgabe 2**[$P2$-Elemente] (10)

Diese Aufgabe ist exakt wie Aufgabe 1, nur dass wir den Raum

$$V_h := \mathbb{P}_2 := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \operatorname{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3\} \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\},$$

der stückweise quadratischen Funktionen betrachten.
Vergleiche die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 1.
**Hinweis:** In der Vorlesung wurden die Einträge $a(\lambda_i, \lambda_j)$ und $a(\lambda_j, \psi_j)$, $i, j = 1, \dots, 3$ bereits berechnet. Überlege dir, wie die Einträge $a(\psi_i, \psi_j)$ lauten.