Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 6

(Besprechung Do. 01.06.2017)

Aufgabe 1 *(Stokes-Problem mit dem MINI-Element)* (15)

Wir betrachten erneut das Stokes-Problem: Sei $\Omega = (0,1)^2$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Sei $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Finde $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} == 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

(die Differentialoperatoren sind ggf. komponentenweise zu verstehen).
Wir setzen

$$V := \{\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{v}|_\Gamma = 0\},$$
$$P := \left\{ p : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega p \; dx = 0 \right\}.$$

Eine Variationsformulierung des obigen Problems lautet: Finde $(\mathbf{u}, p) \in V \times P$, sodass

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \; dx - \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} \; dx &= \int_\Omega \mathbf{f} \mathbf{v} \; dx && \text{für alle } \mathbf{v} \in V \\ - \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{u} \; dx &= 0 && \text{für alle } q \in P. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von Ω. Analog zu Blatt 5 definieren wir die Räume

$$\mathbb{P}^1 := \{v \in C_0(\overline{\Omega}) : v|_T \in \text{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\},$$
$$\mathbb{P}^1_0 := \{v \in \mathbb{P}^1 : \int_\Omega v \; dx = 0\},$$
$$\mathbb{B} := \{v \in C_0(\overline{\Omega}) : v|_T \in \text{span}\{b\} \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Dies führt auf das diskrete Problem: Finde $\mathbf{u}_h \in V_h := (\mathbb{P}^1 \oplus \mathbb{B})^2$ und $p_h \in \mathbb{P}^1_0$, sodass

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{v}_h \; dx - \int_\Omega p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \; dx &= \int_\Omega \mathbf{f} \mathbf{v}_h \; dx, && \text{für alle } \mathbf{v}_h \in V_h, \\ - \int_\Omega q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \; dx &= 0, && \text{für alle } q_h \in \mathbb{P}^1_0. \end{aligned}$$

(a) Von Blatt 5 kennen wir den Raum $\mathbb{P}^1$. Überlegen Sie sich, wie hieraus der Raum $\mathbb{P}^1_0$ (numerisch) konstruiert werden kann.

(b) Schreiben Sie ein Skript, das für die gegebene Funktion $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ das obige Problem löst.

Hinweis: Es ist nicht Teil der Aufgabe, die Lösung zu visualisieren. Das Aufstellen der entsprechenden Matrizen und der rechten Seite reicht bereits.