Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Attila Klimmek
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Einführung in numerische Methoden der Strömungsmechanik
SoSe 2017

Übungsblatt 7

(Besprechung Do. 08.06.2017)

Aufgabe 1 *(Teilchen im Strömungfeld)* (5+5)

Sei $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld der Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

wobei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zwei verschiedene reelle und von Null verschiedene Eigenwerte habe.
Wir betrachten die ODE

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Leiten Sie die allgemeine Lösung für die Gleichung (1) her.
Hinweis: Schlagen Sie die Lösungsformel der Gleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ nach. Betrachten Sie anschließend $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{B}$ die Matrix bestehend aus den Eigenvektoren ist.

(b) Sei

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie eine Funktion, die für $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $\mathbf{u}$ in $(-5, 5)^2$ und die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ mit Startwert $\mathbf{x}_0$ plottet.

Aufgabe 2 *(Stokes-Problem mit dem MINI-Element II)* (10)

Sei $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathbb{P}^1 \oplus \mathbb{B})^2 \times \mathbb{P}^1_0$ die diskrete Lösung des Stokes-Problems von Blatt 6.

Schreiben Sie eine Funktion `ShowMINI(coordinates,elements,dirichlet,u,ub,v,vb,p)` die die Lösung (analog zur `show`-Funktion auf Blatt 4) visualisiert. Hierbei soll das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}_h$ als Vektorfeld geplottet werden.
Es bezeichne `u` den Koeffizientenvektor für die Basisfunktionen von $\mathbb{P}^1$ und `ub` den Koeffizientenvektor der Basisfunktionen von $\mathbb{B}$ von u (analog für `v`,`vb`).