

Übungsblatt 9
(Besprechung Do. 22.06.2017)

Aufgabe 1 (12+3+5)

Wir betrachten erneut die Aufgabe 1 von Blatt 3 mit $a(\cdot) \equiv 1$. Das resultierende Gleichungssystem soll mit dem Mehrgitterverfahren gelöst werden.

Betrachten Sie hierzu die Triangulierungen $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_6$ mit jeweiligen Maschenweiten $h_0 = \frac{1}{2}, h_1 = \frac{1}{4}, \dots, h_6 = \frac{1}{128}$.

- (a) Schreiben Sie eine Routine, die das Gleichungssystem mit dem Mehrgitterverfahren löst. Zur Vor- und Nachglättung sollen $\nu = \mu$ Iterationen des Richardson-Verfahrens und der Dämpfungparameter $\omega = 1$ verwendet werden. Ferner soll wahlweise ein V- oder ein W-Zyklus ausgeführt werden.
- (b) Werden nicht alle möglichen Gitter, sondern nur das feinste und das nächst feinere Gitter $\mathcal{T}_5, \mathcal{T}_6$ benutzt, spricht man von dem *Zweigitter-Verfahren*. Erweitern Sie Ihre Routine aus dem Aufgabenteil (a), sodass wahlweise das Zweigitter-Verfahren ausgeführt wird.
- (c) Seien nun $\mu = \nu = 10$ bzw. $\mu = \nu = 15$. Vergleichen Sie das Mehr- und Zweigitterverfahren (jeweils mit V- und W-Zyklus) bzgl. Laufzeit und Genauigkeit der Lösung. Stellen Sie alle Daten in geeigneter Form dar.

Hinweis: Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

sind gegeben durch

$$\lambda_i = 4 \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{N+1} \right) \right), \quad k = 1, \dots, N.$$