

– Lösungen zu den Übungsaufgaben –
Version 2.1

31. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

Einige Vorbemerkungen	1
1 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 1	3
Aufgabe 1.1	3
Aufgabe 1.2	4
Aufgabe 1.3	5
Aufgabe 1.4	6
Aufgabe 1.5	6
2 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 2	9
Aufgabe 2.1	9
Aufgabe 2.2	9
Aufgabe 2.3	10
Aufgabe 2.4	12
Aufgabe 2.5	12
Aufgabe 2.6	13
Aufgabe 2.8	13
Aufgabe 2.9	14
Aufgabe 2.10	14
3 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 3	15
Aufgabe 3.1	15
Aufgabe 3.2	17
Aufgabe 3.3	18
Aufgabe 3.4	19
Aufgabe 3.5	20
Aufgabe 3.6	21
Aufgabe 3.7	22
Aufgabe 3.8	23
Aufgabe 3.9	24
Aufgabe 3.10	25
Aufgabe 3.11	26
Aufgabe 3.12	27
Aufgabe 3.13	27
Aufgabe 3.14	27
Aufgabe 3.15	28
Aufgabe 3.16	28
Aufgabe 3.17	30

Aufgabe 3.18	31
Aufgabe 3.19	32
Aufgabe 3.20	34
4 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 4	37
Aufgabe 4.1	37
Aufgabe 4.2	37
Aufgabe 4.3	38
Aufgabe 4.4	39
Aufgabe 4.5	40
Aufgabe 4.6	41
Aufgabe 4.7	42
Aufgabe 4.8	43
Aufgabe 4.9	45
5 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 5	47
Aufgabe 5.1	47
Aufgabe 5.2	48
Aufgabe 5.3	48
Aufgabe 5.4	49
Aufgabe 5.5	49
Aufgabe 5.6	51
Aufgabe 5.7	53
Aufgabe 5.8	54
Aufgabe 5.9	56
Aufgabe 5.10	57
Aufgabe 5.11	57
Aufgabe 5.12	58
Aufgabe 5.13	60
Aufgabe 5.14	60
6 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 6	63
Aufgabe 6.1	63
Aufgabe 6.2	64
Aufgabe 6.3	64
Aufgabe 6.4	65
Aufgabe 6.5	65
Aufgabe 6.6	66
Aufgabe 6.7	67
Aufgabe 6.8	68
Aufgabe 6.9	69
Aufgabe 6.10	70
Aufgabe 6.11	70
Aufgabe 6.12	70
Aufgabe 6.13	71
Aufgabe 6.14	71

Aufgabe 6.15	72
Aufgabe 6.16	73
Aufgabe 6.17	74
Aufgabe 6.18	75
Aufgabe 6.19	75
Aufgabe 6.20	76
Aufgabe 6.21	78
Aufgabe 6.22	78
Aufgabe 6.23	80
Aufgabe 6.24	80
7 Aufgaben zu Kapitel 7	83
Aufgabe 7.1	83
Aufgabe 7.2	83
Aufgabe 7.3	84
Aufgabe 7.4	84
Aufgabe 7.5	86
Aufgabe 7.6	89
Aufgabe 7.7	89
Aufgabe 7.8	90
Aufgabe 7.9	91
Aufgabe 7.10	92
8 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 8	95
Aufgabe 8.1	95
Aufgabe 8.2	96
Aufgabe 8.3	97
Aufgabe 8.4	97
Aufgabe 8.5	98
Aufgabe 8.6	100
Aufgabe 8.7	100
Aufgabe 8.8	102
Aufgabe 8.9	103
9 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 9	105
Aufgabe 9.1	105
Aufgabe 9.2	105
Aufgabe 9.3	106
Aufgabe 9.4	107
Aufgabe 9.5	107
Aufgabe 9.6	108
Aufgabe 9.7	108
Aufgabe 9.8	110
Aufgabe 9.9	111
Aufgabe 9.10	112
Aufgabe 9.11	112

Aufgabe 9.12	114
Aufgabe 9.13	114
Aufgabe 9.14	115
Aufgabe 9.15	115
Aufgabe 9.16	116
10 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 10	119
Aufgabe 10.1	119
Aufgabe 10.2	128

Einige Vorbemerkungen

Auf den folgenden Seiten haben wir Lösungsvorschläge für die Aufgaben aus unserem Buch (2. Auflage) zusammen gestellt. Wir haben diese nach bestem Wissen erstellt. Kein Mensch ist frei von Fehlern, wir freuen uns daher über jeden Hinweis bezüglich inhaltlicher Fehler, Ungenauigkeiten oder Tippfehler.

Wie bereits erwähnt machen wir *Lösungsvorschläge*. Dies bedeutet, dass es in vielen Fällen mehr als einen Lösungsweg gibt. Wir sind dankbar für Hinweise auf elegantere, leichtere oder allgemeinere Lösungswege.

An vielen Stellen beziehen wir uns auf Formelnummern aus unserem Buch. Diese sind durch ein hochgestelltes ^{AU} gekennzeichnet.

Das Zusammenstellen und Veröffentlichen dieser Lösungsvorschläge geschieht auf ausdrücklichen Wunsch des Verlages. Wir hoffen sehr, dass sich niemand dadurch davon abhalten lässt, sich selber an den Aufgaben zu versuchen, denn diese dienen dem vertieften Verständnis der Materie.

Wolfgang Arendt
Karsten Urban

1 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 1

Aufgabe 1.1: Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für den in Abbildung 1.1 dargestellten ungedämpften Zweimassenschwinger her. Stellen Sie dazu jeweils die Kräftebilanz bezüglich der einzelnen Massen auf.

Hinweis: Benutzen Sie das Hooke'sche Gesetz: Wird eine Feder durch eine Kraft gedehnt, so ist ihre Längenänderung proportional zur Größe der angreifenden Kraft: $F = k s$ (s : Längenänderung, k : Federkonstante).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.1: Auf die beiden Massen m_1 und m_2 wirken

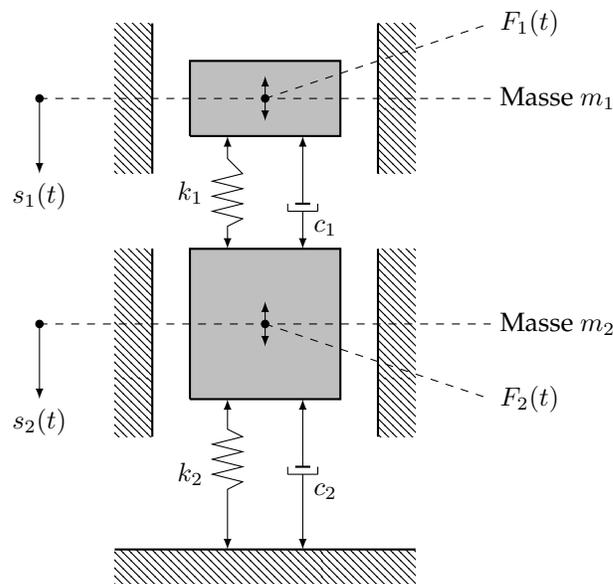


Abbildung 1.1. Zweimassenschwinger mit Massen m_1, m_2 , Dämpfungen c_1, c_2 , Federungen k_1, k_2 und äußeren Anregungen $F_1(t), F_2(t)$. Gesucht sind die vertikalen Auslenkungen $s_1(t), s_2(t)$.

jeweils zwei Arten von Kräften, zum Einen die Kräfte durch die äußere Anregungen F_1 bzw. F_2 und zum Anderen die Federkräfte, die durch das Hooke'sche

Gesetz gegeben sind. Also erfährt die Masse m_1 folgende Kräfte

$$\underbrace{-k_1(s_2 - s_1)}_{\text{Kraft durch die Feder}} + \underbrace{F_1(t)}_{\text{Kraft von außen}}$$

Analog erfährt die Masse m_2 folgende Kräfte

$$\underbrace{(-k_2s_2 + k_1(s_2 - s_1))}_{\text{Kraft durch die beiden Federn}} + \underbrace{F_2(t)}_{\text{Kraft von außen}}$$

Als nächstes benutzen wir das zweite Newton'sche Gesetz, also *Kraft = Masse mal Beschleunigung*. Die Beschleunigung wiederum ist die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit, also $\ddot{s}(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t)$. Damit können wir die entsprechenden Kräftebilanzen aufstellen, also für die Masse m_1

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} s_1(t) = -k_1(s_2(t) - s_1(t)) + F_1(t),$$

d.h.,

$$\frac{d^2}{dt^2} s_1(t) + \frac{k_1}{m_1} (s_2(t) - s_1(t)) = F_1(t)$$

und für die Masse m_2

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} s_2(t) + k_2s_2(t) - k_1(s_2(t) - s_1(t)) = F_2(t).$$

also

$$\frac{d^2}{dt^2} s_2(t) + \frac{k_2}{m_2} s_2(t) - \frac{k_1}{m_1} (s_2(t) - s_1(t)) = F_2(t).$$

Wir erhalten also das gekoppelte System gewöhnlicher Differenzialgleichungen:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dies sind die gesuchten Bewegungsgleichungen. △

Aufgabe 1.2: Die Auslenkung u einer schwingenden Saite sei durch ein Hindernis beschränkt, $u \geq g$. Geben Sie die entsprechende Differenzial-Ungleichung an. Betrachten Sie dazu analog zur Herleitung der Wellengleichung die vertikale Auslenkung $S(x)$ und formulieren Sie die punktweise Beschränkung durch das Hindernis.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.2: Wir betrachten die Herleitung der Wellengleichung anhand des Beispiels der schwingenden Saite in Abschnitt 1.4^{AU}. In (1.18^{AU}) hatten wir gesehen, dass die vertikale Auslenkung der Saite gegeben ist durch den Ausdruck:

$$S(x + \Delta x) \sin \beta - S(x) \sin \alpha = (\rho_0 \Delta x) u_{tt}(t, x).$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem zweiten Newton'schen Gesetz. Wenn diese Auslenkung durch ein Hindernis g begrenzt ist, gilt

$$g(x) \Delta x \leq S(x + \Delta x) \sin \beta - S(x) \sin \alpha = (\rho_0 \Delta x) u_{tt}(t, x).$$

Wie in Abschnitt 1.4^{AU} dividieren wir dies durch die (konstante) horizontale Spannungskomponente

$$S = S(x + \Delta x) \cos \beta = S(x) \cos \alpha$$

und erhalten

$$\frac{g(x) \Delta x}{S} \leq \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho_0 \Delta x}{S} u_{tt}(t, x) = u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x).$$

Nach Division durch Δx und durch Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\frac{g(x)}{S} \leq \frac{\rho_0}{S} u_{tt}(t, x) = \frac{u_x(t, x + \Delta x) - u_x(t, x)}{\Delta x} \rightarrow u_{xx}(t, x) \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

Wir erhalten also die Differenzial-Ungleichung

$$u_{xx}(t, x) \geq \frac{1}{S} g(x),$$

die für alle Zeiten $t \in [0, T]$ erfüllt sein muss. △

Aufgabe 1.3: Gegeben sei ein Fluid mit der Dichte $\rho(t, x)$ und dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(t, x)$. Leiten Sie aus physikalischen Gesetzen die Kontinuitätsgleichung $\rho_t + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$ her. Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der Masseerhaltung und den Gauß'schen Integralsatz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.3: Wir betrachten ein beliebiges Kontroll-Volumen V . Die totale Fluid-Masse in diesem Volumen ist gegeben durch

$$\int_V \rho(t, x) dx.$$

Die zeitliche Änderung der Masse in V lautet

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, x) dx = \int_V \rho_t(t, x) dx. \quad (1.1)$$

Nun sei $\xi \in \partial V$ ein Punkt auf der Oberfläche von V und n_ξ die äußere Normale in diesem Punkt. Die Masse, die im Punkt ξ aus V herausfließt, lautet $\rho \vec{u} \cdot n_\xi$ mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{u} . Die Integration über den gesamten Rand ergibt die Gesamtmasse, die über den Rand von V nach außen fließt, d.h.

$$\int_{\partial V} \rho(t, \xi) \vec{u}(t, \xi) \cdot n_\xi d\xi = - \int_V \nabla \cdot (\rho(t, x) \vec{u}(t, x)) dx, \quad (1.2)$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Divergenzatz folgt. Das Prinzip der Masseerhaltung besagt, dass Masse niemals erzeugt oder zerstört werden kann, also sind die Ausdrücke in (1.1) und (1.2) identisch:

$$\int_V \rho_t(t, x) dx = - \int_V \nabla \cdot (\rho(t, x) \vec{u}(t, x)) dx.$$

Da V beliebig ist, erhalten wir

$$\rho_t(t, x) + \nabla \cdot (\rho(t, x) \vec{u}(t, x)) = 0,$$

wie gefordert. △

Aufgabe 1.4: Bestimmen Sie für $u_t = u_{xx} + u$ alle Lösungen der Form $u(t, x) = \varphi(x - ct)$ (so genannte travelling waves).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.4: Mit $u(t, x) = \varphi(x - ct)$ gilt

$$u_t(t, x) = -c \varphi'(x - ct), \quad u_{xx}(t, x) = \varphi''(x - ct),$$

also wird die Gleichung $u_t = u_{xx} + u$ durch die Variablen-Transformation $z := x - ct$ zur gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$\varphi''(z) + c \varphi(z) + \varphi(z) = 0. \tag{1.3}$$

Die ist offenbar eine homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom lautet mit $\varphi = e^{yz}$

$$y^2 + cy + 1 = 0. \tag{1.4}$$

Dieses Polynom hat die Wurzeln

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(-c + \sqrt{c^2 + 4} \right), \quad y_2 = \frac{1}{2} \left(-c - \sqrt{c^2 + 4} \right). \tag{1.5}$$

Also hat die allgemeine Lösung der Gleichung (1.3) die Form

$$\varphi(z) = c_1 e^{y_1 z} + c_2 e^{y_2 z}, \tag{1.6}$$

wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind. Die Lösung der ursprünglichen Gleichung $u_t = u_{xx} + u$ lautet damit

$$u(t, x) = \varphi(z) = c_1 e^{y_1(x-ct)} + c_2 e^{y_2(x-ct)},$$

was die gesuchte allgemeine Lösung darstellt. Die beiden Konstanten c_1 und c_2 werden durch geeignete Rand- bzw. Anfangsbedingungen festgelegt. △

Aufgabe 1.5: Leiten Sie die Gleichung $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0$, $a \in \mathbb{R}$ der Auslenkung $u(t, x)$ eines beidseitig aufliegenden Stabes der Länge ℓ her. Benutzen Sie dazu die Beziehung $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ zwischen dem Krümmungsmoment M und der Querkraft Q . Die Beziehung zwischen M und der gesuchten vertikalen Auslenkung u lautet $M = -EI u_{xx}$ mit dem Elastizitätsmodul E und dem Trägheitsmoment I . Diese beiden Größen gehen u.a. in die Konstante a ein.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.5: Der Stab habe die horizontale Ausdehnung

$[0, \ell]$ und den Querschnitt A . Die konstante lineare Massendichte sei mit ρ_0 bezeichnet. Genau wie bei der Herleitung der Wellengleichung in Abschnitt 1.4 erhalten wir $A(\rho_0 \Delta x)u_{tt}(t, x)$ als diejenige Kraft, die auf ein Stück der Länge Δx des Stabes wirkt. Der einzige Unterschied zu Abschnitt 1.4 besteht in der Multiplikation mit A , da wir die Dicke des Stabes nicht vernachlässigen dürfen wie bei der Saite.

Die horizontale Querkraft ist Q , also können wir die obige Kraft auch alternativ als $\Delta x Q_x$ beschreiben. Damit gilt nach Division durch Δx und den in der Aufgabenstellung angegebenen Beziehungen

$$\rho_0 A u_{tt}(t, x) = Q_x(t, x) = M_{xx}(t, x) = -EI u_{xxxx}(t, x),$$

also die behauptete Gleichung mit $a^2 = \frac{EI}{\rho_0 A}$. △

2 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 2

Aufgabe 2.1: Klassifizieren Sie folgende partielle Differenzialgleichungen im \mathbb{R}^2 :

(a) $(\partial_1 u(x))^2 + e^{x_2} \partial_2 u(x) = \sin(x_1)$

(b) $\partial_1^2 u(x) + e^{x_2} \partial_2 u(x) = \sin^2(x_1)$

(c) $\partial_1^2 u(x) + \exp(\partial_2 u(x)) = \sin^3(x_1)$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.1:

- a) Da die Nichlinearität in der höchsten Ableitung ist, ist es eine nichtlineare Gleichung erster Ordnung. Sie ist weder semilinear noch quasi-linear.
- b) Diese Gleichung ist linear, von zweiter Ordnung. Der Hauptteil lautet offenbar $Au(x) = \partial_1^2 u(x)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$. Also ist die Gleichung parabolisch.
- c) Diese Gleichung ist von zweiter Ordnung und linear in den Ableitungen zweiter Ordnung. Daher ist sie semilinear. Da der Hauptteil identisch mit b) ist, ist auch diese Gleichung parabolisch.

△

Aufgabe 2.2: Man betrachte folgendes Problem:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) = u(x)^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u(x_1, -x_1) = x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Lösen Sie diese Gleichung in einem geeigneten Bereich mit der Methode der Charakteristiken.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.2: Das Problem besteht offenbar in der Nichtlinearität nullter Ordnung. Um diese zu behandeln, erweitern wir die Gleichung wie folgt. Sei $\mathbf{x}(s) := (x_1(s), x_2(s))$ die Charakteristik, dann definieren wir $z(s) := u(\mathbf{x}(s))$ als die Lösung entlang der Charakteristik. Dann definiert man für eine Funktion $U = U(x_1, x_2, u)$ das erweiterte Problem als

$$U_{x_1} + U_{x_2} + u^2 U_u = 0$$

und sucht eine Lösung von $U(x_1, x_2, u)$. Dies ist in der Tat die gesuchte Darstellung entlang der Charakteristik, was man leicht sieht. Aus $U(x_1, x_2, u) = 0$ folgt $U_{x_1} + U_u u_{x_1} = U_{x_2} + U_u u_{x_2} = 0$, also

$$0 = U_{x_1} + U_{x_2} + u^2 U_u = (-u_{x_1} - u_{x_2} + u^2)U_u.$$

Dies ist nun eine lineare Gleichung mit variablen Koeffizienten und wir können leicht die charakteristischen Gleichungen aufstellen:

$$\dot{x}_1(s) = 1, \quad \dot{x}_2(s) = 1, \quad \dot{z}(s) = z(s)^2.$$

Wir haben die Lösung u entlang $\Gamma := \{(x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ vorgegeben. Es macht also Sinn, Charakteristiken zu betrachten, die orthogonal dazu verlaufen, also $\mathbf{x}(s) := (s, s + c)$ für $s \in \mathbb{R}$. Damit können wir die allgemeine Lösung der charakteristischen Gleichungen schreiben als: \triangle

$$x_1(s) = s, \quad x_2(s) = s + c, \quad z(s) = \frac{z_0}{1 - s z_0}.$$

Um z_0 zu bestimmen, benötigen wir den Schnittpunkt der Charakteristik mit Γ . Dieser lautet $(-c/2, c/2)$, was man leicht nachrechnet. Damit erhalten wir

$$z(s) = u(s, s + c) = -\frac{c}{2 + c s}.$$

Dieser Ausdruck macht natürlich nur für $s \neq -2/c$ Sinn.

Aufgabe 2.3: Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $(2x_2 - 3x_1)\partial_{x_1}u - x_2\partial_{x_2}u = x_2^2(2x_2 - 5x_1)$ und bestimmen Sie die Lösung $u(x_1, x_2)$ für die Anfangswerte $u(x_1, 1) = x_1 + 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.3: Wir parametrisieren die Fläche folgendermaßen

$$x = x(r, s), \quad y = y(r, s), \quad z = z(r, s)$$

sowie

$$u(x_1, x_2) = z(r(x_1, x_2), s(x_1, x_2))$$

und die Kurve Γ , auf der Werte der Lösung vorgegeben sind:

$$\Gamma := (\gamma_1(r), \gamma_2(r)) = (r, 1).$$

Also erhalten wir für Anfangsbedingungen

$$x_1(r, 0) = r, \tag{2.1a}$$

$$x_2(r, 0) = 1, \tag{2.1b}$$

$$z(r, 0) = r + 1 \tag{2.1c}$$

und die Gleichungen für charakteristische Kurven sind gegeben durch

$$\frac{d}{ds}x_1(r, s) = 2x_2 - 3x_1, \tag{2.2a}$$

$$\frac{d}{ds}x_2(r, s) = -x_2, \tag{2.2b}$$

$$\frac{d}{ds}z(r, s) = x_2^2(2x_2 - 5x_1). \tag{2.2c}$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung (2.2a), deren Lösung auf Grund von (2.1b) gegeben ist durch

$$x_2(r, s) = e^{-s}. \quad (2.3)$$

Einsetzen von (2.3) in (2.2a) und Lösen unter Berücksichtigung von (2.1a) ergibt

$$x_1(r, s) = e^{-s} - e^{-3s} + r e^{-3s}. \quad (2.4)$$

Wir beachten (2.1c), setzen (2.3) und (2.4) in (2.2c) ein und erhalten

$$z(r, s) = e^{-s} - e^{-3s} + (x-1)e^{-5s} + 1. \quad (2.5)$$

Lösen von (2.3) und (2.4) für $r(x_1, x_2)$ und $s(x_1, x_2)$ ergibt

$$s(x_1, x_2) = \log x_2 \quad (2.6)$$

und

$$r(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2^3} \quad (2.7)$$

Wir setzen (2.6) und (2.7) in (2.5) ein und vereinfachen diesen Ausdruck zu

$$u(x_1, x_2) = z(r(x_1, x_2), s(x_1, x_2)) = x_1 x_2^2 + 1.$$

Die Skizze der Charakteristik erhalten wir, in dem wir r und s in (2.3) und (2.4) verändern, vgl. Abbildung 2.1. \triangle

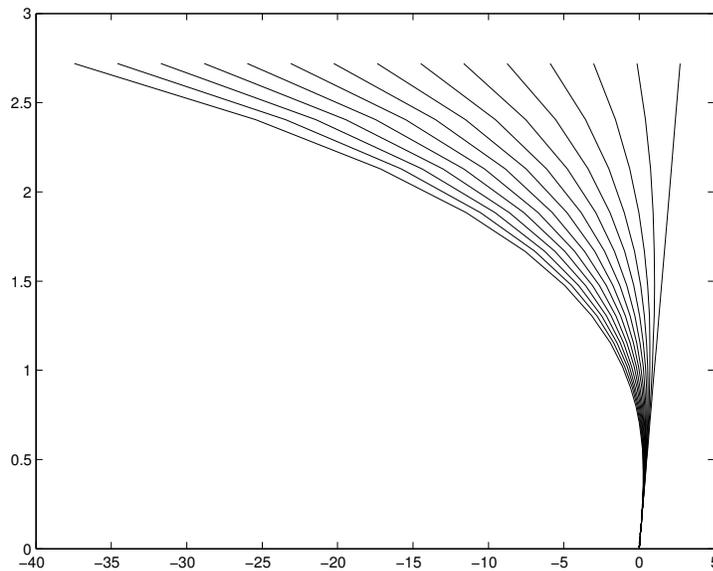


Abbildung 2.1. Charakteristiken zu Aufgabe 2.3^{AU}

Aufgabe 2.4: Bestimmen Sie den Typ der folgenden partiellen Differenzialgleichungen:

$$(a) -2u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$(b) \frac{5}{2}u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$(c) 9u_{xx} + 12u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.4: In allen drei Fällen handelt es sich um lineare partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. In dem wir $u_{xy} = \frac{1}{2}(u_{xy} + u_{yx})$ verwenden, können wir alle drei Gleichungen symmetrisieren. Dann erhalten wir:

(a) $-2u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xy} + \frac{1}{2}u_{yx} + u_{yy} = 0$. Die entsprechende Matrix lautet $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Also ist ein Eigenwert positiv und einer negativ, die Gleichung ist hyperbolisch.

(b) $\frac{5}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xy} + \frac{1}{2}u_{yx} + u_{yy} = 0$. Die Matrix lautet $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{13}$. Beide Eigenwerte sind also positiv, die Gleichung ist elliptisch.

(c) $9u_{xx} + 6u_{xy} + 6u_{yx} + 4u_{yy} = 0$. Die Matrix lautet $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 13$, die Gleichung ist parabolisch.

△

Aufgabe 2.5: Bestimmen Sie den Typ der partiellen Differenzialgleichung im \mathbb{R}^2

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u + (y^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = x \frac{\partial}{\partial x} u + y \frac{\partial}{\partial y} u.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.5: Wir symmetrisieren die Gleichung und erhalten $(x^2 - 1)u_{xx} + xy u_{xy} + xy u_{yx} + (y^2 - 1)u_{yy} = x u_x + y u_y$. Der Hauptteil steht auf der linken Seite und wir erhalten die Matrix $A = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & xy \\ xy & y^2 - 1 \end{pmatrix}$. Damit gilt $\det(A) = 1 - x^2 - y^2$, also ist die Gleichung

- parabolisch, falls $x^2 + y^2 = 1$, also falls $(x, y) \in \partial \bar{B}(0; 1)$ mit $B(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- hyperbolisch, falls $x^2 + y^2 > 1$, also falls $(x, y) \notin \bar{B}(0; 1)$;
- elliptisch, falls $x^2 + y^2 < 1$, also falls $(x, y) \in B(0; 1)$.

△

Aufgabe 2.6: Sei $a > 0$ eine Konstante und seien $g, h \in C^1[0, 1]$ derart, dass $-ag'(0) = h'(0)$ und $g(0) = h(0)$. Zeigen Sie, dass es genau ein $u \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$ gibt derart,

dass

$$\begin{aligned} u_t(t, x) + au_x(t, x) &= 0, & t, x \in (0, 1), \\ u(0, x) &= g(x), & x \in [0, 1], \\ u(t, 0) &= h(t), & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Benutzen Sie die Methode der Charakteristiken.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.6: Aus Abschnitt 2.1^{AU} wissen wir, dass die Charakteristiken lauten $\gamma(s) = c + as$, sie sind also Geraden. Nach Voraussetzung ist $a > 0$, also schneidet die Charakteristik durch einen Punkt $(t, x) \in [0, 1]^2$ entweder die x -Achse oder die t -Achse in genau einem Punkt:

- Für $t > ax$ liegt der Punkt oberhalb des Geradenstückes $S := \{(x, t) \in [0, 1]^2 : x = at\}$. Also schneidet die Charakteristik die t -Achse im Punkt $(0, t_0)$ mit $t_0 = t - \frac{x}{a}$. Für die Lösung gilt $u(t, x) = h(t_0) = h(t - \frac{x}{a})$.
- Für $t < ax$ liegt (t, x) unterhalb von S und die Charakteristik schneidet die x -Achse im Punkt $(x_0, 0)$ mit $x_0 = x - at$. Also gilt für die Lösung $u(t, x) = g(x_0) = g(x - at)$.
- Im Falle $t = ax$ liegt (t, x) auf S . Also verläuft die Charakteristik durch den Nullpunkt. Nun gilt einerseits $u(0, 0) = h(t_0) = h(0)$ und andererseits $u(0, 0) = g(x_0) = g(0)$. Nach Voraussetzung sind diesen beiden aber gleich. Also ist u stetig.

Schließlich müssen wir noch die Differenzierbarkeit untersuchen. Unterhalb von S gilt $u_t = -a g'(x - at)$, $u_x = g'(x - at)$ und oberhalb von S erhalten wir $u_t = h'(t - \frac{x}{a})$, $u_x = -\frac{1}{a} h'(t - \frac{x}{a})$. Da $h'(0) = -a g'(0)$ und u_t und u_x stetig auf $[0, 1]^2$ und erfüllen $u_t + a u_x = 0$. \triangle

Aufgabe 2.8: Sei $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zu jedem $T > 0$ gebe es ein $L \geq 0$ derart, dass $|a(t, x)| \leq L(1 + |x|)$ für $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es dann höchstens eine Lösung von

$$u_t(t, x) = a(t, x) u(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

gibt.

Anleitung: Benutzen Sie das Lemma von Gronwall: Ist $y : (\alpha, t] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sind $c, \lambda \geq 0$ derart, dass

$$|y(s)| \leq c + \lambda \int_s^t |y(r)| dr, \quad s \in (\alpha, t],$$

so gilt $|y(s)| \leq ce^{\lambda(t-s)}$, $s \in (\alpha, t]$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.8: Sei $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Sei $y \in C^1(\alpha, \beta)$ die maximale Lösung von

$$\dot{y}(s) = a(s, y(s)), \quad s \in (\alpha, \beta),$$

wobei $t \in (\alpha, \beta)$. Wir zeigen, dass $\alpha < 0$. Angenommen, es ist $\alpha \geq 0$. Es ist $y(t) - y(s) = \int_s^t \dot{y}(r) dr = \int_s^t a(r, y(r)) dr$. Damit gilt

$$|y(s)| \leq |y(t)| + \int_s^t L(1 + |y(r)|) dr.$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt, dass $|y(s)| \leq (1 + L_t)e^{(t-s)L}$ für alle $s \in (\alpha, t]$. Damit ist y auf $(\alpha, t]$ beschränkt, was der Maximalität des Intervalls widerspricht. Somit ist $\alpha < 0$. Damit ist nach Satz 2.1^{AU} $u(t, x) = u(t, y(t)) = u(0, y(0)) = u_0(y(0))$. \triangle

Aufgabe 2.9: Zeigen Sie, dass es keine Funktion $u \in C^1((0, \infty) \times \mathbb{R})$ gibt, so dass

$$u_t(t, x) = x^2 u_x(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = \sin x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.9: Sei u eine Lösung. Nach Beispiel 2.5^{AU} gilt für $x < \frac{1}{t}$, $u(t, x) = \sin(\frac{x}{1-xt})$. Damit hat u keine stetige Fortsetzung auf die Kurve $\{(t, \frac{1}{t}) : t > 0\}$. \triangle

Aufgabe 2.10: (Trivialität der Charakteristiken für die Laplace-Gleichung.) Bestimmen Sie die Kurven der Form $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1[0, 1]$, auf denen alle Lösungen der Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ konstant sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.10: Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1[0, 1]$ derart, dass

$$\frac{d}{dt} u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \equiv 0$$

für alle $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ definiert $u(x, y) = ax + by$ eine solche Lösung. Damit ist $a\gamma_1'(t) + b\gamma_2'(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Somit ist $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ orthogonal zu jedem Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Die Funktion $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ist somit konstant. \triangle

3 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 3

Aufgabe 3.1: Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem für die Telegraphengleichung

$$u_{xx} - a u_{tt} - b u_t - c u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

mit $u(0, x) = u_t(0, x) = 0$, $u(t, 0) = g(t)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$ mit der Annahme $b^2 - 4ac = 0$. Welche Voraussetzungen muss die Funktion g erfüllen?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.1: Wir gehen wie in Beispiel 3.66*^{AU} vor:

1. Transformation der Differenzialgleichung:

Wir wenden die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit an und erhalten für $\mathcal{U}(s, x) := \mathcal{L}[u(\cdot, x)](s)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{U}_{xx}(s, x) - a[s^2\mathcal{U}(s, x) - su(0, x) - u_t(0, x)] \\ &\quad - b[s\mathcal{U}(s, x) - u(0, x)] - c\mathcal{U}(s, x) \\ &= \mathcal{U}_{xx}(s, x) - (as^2 + bs + c)\mathcal{U}(s, x) \end{aligned}$$

aufgrund der homogenen Anfangsbedingungen. Mit der Bezeichnung

$$k^2 := as^2 + bs + c \tag{3.1}$$

folgt daraus die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\mathcal{U}_{xx}(s, x) = k^2\mathcal{U}(s, x). \tag{3.2}$$

2. Transformation der Randbedingungen:

Auf die Randbedingung $u(t, 0) = g(t)$ wenden wir die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit an und erhalten

$$\mathcal{U}(s, 0) = G(s) := \mathcal{L}[g](s). \tag{3.3}$$

Ähnlich transformieren wir die asymptotische Randbedingung:

$$0 = \mathcal{L}\left[\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x)\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{U}(s, x). \tag{3.4}$$

3. Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

Wir erhalten für $c \in \mathbb{C}$ folgendes Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{xx}(s, x) &= k^2 \mathcal{U}(s, x), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{U}(s, x) &= 0, \\ \mathcal{U}(s, 0) &= G(s). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$\mathcal{U}(s, x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

mit Konstanten c_1 und c_2 . Um diese zu bestimmen, benutzen wir die Randbedingungen und erhalten $c_1 = 0$ sowie $c_2 = G(s)$ und damit

$$\mathcal{U}(s, x) = G(s) e^{-xk} = G(s) e^{-x\sqrt{as^2+bs+c}}$$

Da nach Voraussetzung $b^2 - 4ac = 0$ ist, hat $as^2 + bs + c = 0$ die doppelte Nullstelle $s = -b/2a$. In diesem Fall gilt $c = b^2/(4a)$ und damit

$$as^2 + bs + c = as^2 + bs + \frac{b^2}{4a} = a \left(s^2 + s \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) = a(s + b/2a)^2,$$

was wiederum ergibt

$$\mathcal{U}(s, x) = e^{-\frac{bx}{2\sqrt{a}}} e^{-x\sqrt{a}s} G(s). \quad (3.5)$$

4. Inverse Laplace-Transformation:

Mit der Umkehrtransformation gilt

$$u(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{U}(s, x)] = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\frac{bx}{2\sqrt{a}}} e^{-x\sqrt{a}s} G(s)\right].$$

Mit der Heaviside-Funktion H (vgl. Aufgabe 3.13^{AU}) gilt mit Satz 3.62* (v) für $\alpha > 0$ und $\operatorname{Re} s > \gamma$:

$$\mathcal{L}[f(\cdot - \alpha)H(\cdot - \alpha)](s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}[fH](s) = e^{-\alpha s} F(s),$$

also

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\alpha s} F(s)](t) = f(t - \alpha) H(t - \alpha).$$

Einsetzen in (3.5) ergibt

$$u(x, t) = e^{-\frac{bx}{2\sqrt{a}}} \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-x\sqrt{a}s} G(s)\right] = e^{-\frac{bx}{2\sqrt{a}}} g(t - x\sqrt{a}) H(t - x\sqrt{a}),$$

die gesuchte Lösung.

△

Aufgabe 3.2: Lösen Sie mittels Laplace-Transformation

$$u_t = u_{xx}, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$$

mit $u(0, x) = 1$ für $x > 0$, $u(t, 0) = 0$ für $t > 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.2: Sei $\mathcal{U}(s, x) := \mathcal{L}[u(t, x, \cdot)]$. Wir gehen wie in Aufgabe 3.1^{AU} vor:

1. Transformieren der Gleichung ergibt $\mathcal{U}_{xx}(s, x) = s\mathcal{U}(s, x) - 1$, wobei wir die Anfangsbedingung $u(0, x) = 1$ verwendet haben.
2. Transformieren der Randbedingungen: Diese ergeben sich zu $\mathcal{U}(s, 0) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{U}(s, x) = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$.
3. Lösen des transformierten Systems
Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet

$$\mathcal{U}(s, x) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}$$

mit Konstanten c_1 und c_2 . Diese bestimmen wir wieder durch Betrachtung der Randbedingungen. Aus

$$\frac{1}{s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{U}(s, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s} \right)$$

folgt $c_1 = 0$. Mit $\mathcal{U}(s, 0) = 0$ ergibt sich $c_2 = -1/s$ und wir erhalten

$$\mathcal{U}(s, x) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}.$$

4 Inverse Transformation:

Wir verwenden folgenden Zusammenhang, den man in üblichen Tabellen für die Laplace-Transformation findet. Mit der so genannten *complementary error function* definiert als

$$\operatorname{erfc}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$$

gilt für $a > 0$ die Beziehung

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right] = \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right).$$

Wegen $x > 0$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right] = 1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) = \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

die geforderte Lösung. Hierbei ist erf die *error function* definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

△

Aufgabe 3.3: Leiten Sie mittels der Fourier-Transformation eine Formel für die Lösung des Dirichlet-Problems $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ mit Randwerten $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, her. Welche Bedingung muss an f gestellt werden?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.3: Da $y \in \mathbb{R}^+$ ist, wenden wir die Fourier-Transformation auf die Variable x an. Wir setzen $\mathcal{U}(\omega, y) := \mathcal{F}[u(\cdot, y)](\omega)$. Dann gehen wir analog zu Beispiel 3.59^{AU} vor.

1. Transformation der Gleichung

Mit den Rechenregeln der Fourier-Transformation in Satz 3.53^{AU} erhalten wir

$$-\omega^2 \mathcal{U}(\omega, y) + \mathcal{U}_{yy}(\omega, y) = 0. \quad (3.6)$$

2. Transformation der Randbedingung

Es ergibt sich

$$\mathcal{U}(\omega, 0) = \mathcal{F}[f](\omega) =: F(\omega). \quad (3.7)$$

3. Lösung des transformierten Systems:

Die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung (3.6) lautet

$$\mathcal{U}(\omega, y) = c_1 e^{-\omega y} + c_2 e^{\omega y}$$

mit Konstanten c_1 und c_2 . Diese bestimmen wir durch Berücksichtigung der Randbedingungen. Zunächst muss $c_2 = 0$ sein, da sonst die Lösung unbeschränkt ist. Weiter gilt mit (3.7) die Beziehung $c_1 = \mathcal{U}(\omega, 0) = F(\omega)$ und damit

$$\mathcal{U}(\omega, y) = F(\omega) e^{-\omega y}. \quad (3.8)$$

4. Inverse Transformation:

Wir erhalten die Lösung aus $u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\cdot)e^{-\cdot y}](x)$. Aus den üblichen Tabellen für die Fourier-Transformationen können wir entnehmen, dass

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\cdot y}](x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} =: g(x).$$

Als nächstes verwenden wir den Faltungssatz (Satz 3.55^{AU}) und erhalten die gesuchte Formel

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\cdot)e^{-\cdot y}] = (f * g)(x) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi,$$

was die Poisson-Formel bezüglich der Halbebene ist.

△

Aufgabe 3.4: (Abel'sche Konvergenz von Fourier-Reihen.)

a) Zeigen Sie, dass der Raum \mathcal{T} der trigonometrischen Polynome in $C_{2\pi}$ dicht ist. Benutzen Sie dazu den Satz von Stone-Weierstraß, vgl. Satz A.5^{AU}.

b) Sei $f \in C_{2\pi}$ mit Fourier-Reihe

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

Sei gemäß a) $f_n(t) = c_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{N_n} (a_k^{(n)} \cos(kt) + b_k^{(n)} \sin(kt))$, so dass $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, dass $c_0^{(n)} \rightarrow c_0$, $a_k^{(n)} \rightarrow a_k$, $b_k^{(n)} \rightarrow b_k$ für $n \rightarrow \infty$.

c) Sei $u_n(r, t) = c_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{N_n} r^k (a_k^{(n)} \cos(kt) + b_k^{(n)} \sin(kt))$. Zeigen Sie, dass u_n gleichmäßig auf $[0, 1] \times \mathbb{R}$ gegen eine Funktion $u \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$ konvergiert.

d) Zeigen Sie, dass $u(r, t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ für $0 \leq r < 1$.

e) Schließen Sie, dass $\lim_{r \uparrow 1} u(r, t) = f(t)$ gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}$. Das ist genau die Abel'sche Konvergenz der Fourier-Reihe von f (vgl. Satz 3.11^{AU}).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.4:

a) Wegen der bekannten Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen ist die Menge $\mathcal{A}_0 := \{f|_{[0, 2\pi]} : f \in \mathcal{T}\}$ eine Unterálgebra von $C[0, 2\pi]$. Sie enthält die konstanten Funktionen; aber da $f(0) = f(2\pi)$ für alle $f \in \mathcal{A}_0$, trennt sie nicht die Punkte. Die Menge $\mathcal{A} := \{g + \lambda id : \lambda \in \mathbb{R}, g \in \mathcal{A}_0\}$ ist eine Unterálgebra, die die Punkte von $[0, 2\pi]$ trennt, wobei $id(t) = t$. Damit ist \mathcal{A} nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in $C[0, 2\pi]$. Wir identifizieren $C_{2\pi}$ mit der Unterálgebra $\{f \in C[0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$ von $C[0, 2\pi]$. Sei $f \in C_{2\pi}$. Dann gibt es $f_n = g_n + \lambda_n id$, so dass $f_n \rightarrow f$ in $C_{2\pi}$, wobei $g_n \in \mathcal{T}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Es ist $\lambda_n id(2\pi) = \lambda_n 2\pi = f_n(2\pi) - g_n(2\pi) = f_n(0) - g_n(0) = \lambda_n id(0) = 0$. Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$ in $C_{2\pi}$.

- b) Es ist $a_k^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) \cos(kt) dt$. Da $f_n(t) \rightarrow f(t)$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$, folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = a_k$. Die Argumente für $b_k^{(n)}$ und $c_0^{(n)}$ sind identisch.
- c) Sei $v_n(r \cos t, r \sin t) = u_n(r, t)$, $0 \leq r \leq 1$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $v_n \in C(\mathbb{D}) \cap C^2(\mathbb{D})$ mit $\Delta v_n = 0$, $v_n|_{\partial\Omega} = g_n$, $g_n(\cos t, \sin t) = f_n(t)$. Nach dem Maximum-Prinzip ist

$$\|v_n - v_m\|_{C(\mathbb{D})} \leq \|f_n - f_m\|_{\infty}.$$

Damit ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C(\mathbb{D})$. Es existiert also $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ gleichmäßig in $C(\mathbb{D})$, also auch $u(r, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, t)$ gleichmäßig in $[0, 1] \times \mathbb{R}$, wobei $v(r \cos t, r \sin t) = u(r, t)$.

- d) Setze $a_k^{(n)} = b_k^{(n)} = 0$ für $k > N_n$. Es gilt $|a_n^k| \leq \frac{1}{\pi} \|f_n\|_{\infty}$ und für $|b_n^k| \leq \frac{1}{\pi} \|f_n\|_{\infty}$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, ist die Folge beschränkt. Damit gibt es $c \geq 0$, so dass $|a_n^k| \leq c$, $|b_n^k| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Sei $r < 1$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} r^k 2c \leq \varepsilon$. Damit ist

$$\begin{aligned} |u_n(r, t) - u(r, t)| &\leq \\ |c_0 - c^{(n)}| + \sum_{k=1}^m r^k |(a_k^{(n)} - a_k) \cos(kt) + (b_k^{(n)} - b_k) \sin(kt)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(r, t) - u(r, t)| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

- e) Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n \rightarrow f$ in $C_{2\pi}$ und $u_n \rightarrow u$ gleichmäßig auf $[0, 1] \times \mathbb{R}$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$ sowie $|u_n(r, t) - u(r, t)| \leq \varepsilon$ für alle $r \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$, $n \geq n_0$. Es ist $u_n(1, t) = f_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, somit ist $|f(t) - u(r, t)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |u_n(1, t) - u(1, t)| + |u(1, t) - u(r, t)| \leq 2\varepsilon + |u(1, t) - u(r, t)|$ für alle $n \geq n_0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Da u gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ ist, gibt es $r_0 < 1$, so dass $|u(1, t) - u(r, t)| \leq \varepsilon$ für alle $r \in [r_0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$ und somit auch alle $t \in \mathbb{R}$ wegen der 2π -Periodizität von $u(r, \cdot)$. Damit ist $|f(t) - u(r, t)| \leq 3\varepsilon$ für alle $r \in [r_0, 1]$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

△

Aufgabe 3.5: Zeigen Sie, dass für $g_a(t) := \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-x^2/a}$, $a \in \mathbb{R}_+$, gilt

$$\hat{g}_a(\omega) = (2\pi)^{-1/2} e^{-a\omega^2/4}. \text{ Benutzen Sie dazu die Tatsache, dass } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.5: Nach Definition gilt

$$\hat{g}_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Mit den Abkürzungen $\alpha := \frac{1}{\sqrt{a\pi}}$ und $b := \frac{1}{a}$ gilt $g_a(t) = \alpha e^{-bt^2}$. Wir erhalten für die Fourier-Transformation folgenden Ausdruck für $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{g}_a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(bt^2+i\omega t)} dt.\end{aligned}$$

Bezüglich des Exponenten benutzen wir quadratische Ergänzung und erhalten

$$b\left(t + i\frac{\omega}{2b}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4b} = bt^2 + i\omega t$$

und somit

$$\hat{g}_a(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(t+i\frac{\omega}{2b})^2} e^{\frac{\omega^2}{4b}} dt = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\omega^2}{4b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(t+i\frac{\omega}{2b})^2} dt.$$

Nun verwenden wir die Variablensubstitution $x = \sqrt{b}(t + i\frac{\omega}{2b})$ und erhalten unter Verwendung des Hinweises aus der Aufgabenstellung

$$\hat{g}_a(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\omega^2}{4b}} \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\alpha}{\sqrt{2b}} e^{\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{a\omega^2/4},$$

wie gefordert. △

Lemma 3.21^{AU} (Polarkoordinaten).

Sei $v : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und $u : (0,1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $u(r, \theta) = v(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Dann ist v genau dann 2-mal stetig differenzierbar, wenn $v \in C^2(\mathbb{D})$. In diesem Fall gilt

$$\Delta v(r \cos \theta, r \sin \theta) = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Aufgabe 3.6: Beweisen Sie Lemma 3.21^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.6: Die angegebene Variablen-Transformation kann geschrieben werden als

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta, \quad (3.9)$$

wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (3.10)$$

Wir schreiben dann $v(x, y) = u(r, \theta)$. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$v_x = \frac{\partial r}{\partial x} u_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} u_\theta, \quad v_y = \frac{\partial r}{\partial y} u_r + \frac{\partial \theta}{\partial y} u_\theta. \quad (3.11)$$

Aus (3.10) erhalten wir

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta.$$

Aus $\theta = \arctan(y/x)$ folgt

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}. \quad (3.13)$$

Daraus folgt für die Differenzialoperatoren:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Mit Hilfe der Produktregel und des Satzes von Schwarz gilt:

$$\begin{aligned} v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} v_x = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} u_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} u_\theta \right) \\ &= v_{rr} \cos^2 \theta - v_{r\theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} + v_\theta \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} + v_r \frac{\sin^2 \theta}{r} + v_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} v_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &= v_{rr} \sin^2 \theta + v_{r\theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} - v_\theta \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} + v_r \frac{\sin^2 \theta}{r} + v_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Wegen $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ folgt damit die Behauptung. \triangle

Satz 3.40^{AU}.

Es gilt $g \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ und

$$g_t = g_{xx}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.14a)$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(t, x) dx = 1, \quad t > 0. \quad (3.14b)$$

Aufgabe 3.7: Beweisen Sie Satz 3.40^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.7: Der Gauß-Kern ist definiert als

$$g(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Da $g(x, t)$ das Produkt zweier glatter Funktionen ist ($t > 0$), ist es offensichtlich, dass g glatt ist. Um zu beweisen, dass g die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, berechnen wir einerseits

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[e^{-x^2/4t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) + \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-x^2/4t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[e^{-x^2/4t} \left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}} \right) + \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{x^2 e^{-x^2/4t}}{4t^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{8t^2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} \end{aligned} \quad (3.15)$$

und andererseits

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x^2/4t}) = -\frac{x}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \left[x \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2/4t} + e^{-x^2/4t} \frac{\partial}{\partial x} x \right] \\ &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \left[-\frac{x^2}{2t} e^{-x^2/4t} + e^{-x^2/4t} \right] \\ &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} + \frac{1}{8t^2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vergleichen von (3.15) und (3.16) liefert $g_t = g_{xx}$ wie behauptet. Nun zum zweiten Teil der Behauptung. Setze

$$I := \int_{\mathbb{R}} g(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} dx$$

Die Variablen-Substitution $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ liefert $dz = dx/2\sqrt{t}$ und damit

$$I = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} 2\sqrt{t} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

wie gefordert. △

Lemma 3.42^{AU} (Radialer Laplace-Operator).

Sei $0 \leq \rho < R$ und $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho < |x| < R\}$ ein Ringgebiet. Weiter sei $v \in C^2(\rho, R)$ und $u(x) := v(|x|)$. Dann ist $u \in C^2(\Omega)$ und

$$(\Delta u)(x) = \left(v_{rr} + \frac{d-1}{r} v_r \right) (|x|).$$

Aufgabe 3.8: Beweisen Sie Lemma 3.42^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.8: Wir wissen, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten gegeben ist durch (vgl. Aufgabe 3.6^{AU} für $d = 2$)

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Angenommen, $v = v(r)$ sei eine radiale Funktion, die nicht von θ abhängt, dann erhalten wir für $d = 2$

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r.$$

Im Fall von d -Dimensionen muss dies zuerst in sphärische Koordinaten transformiert werden, was den Nenner $d - 1$ ergibt. △

Satz 3.43^{AU}.

Sei $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und exponentiell beschränkt. Definiere

$$u(t, x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-y)^2/4t} u_0(y) dy, \quad (3.17)$$

dann gilt $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ und

$$u_t = \Delta u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.18a)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = u_0(x), \quad (3.18b)$$

gleichmäßig auf beschränkten Mengen des \mathbb{R}^d . Weiterhin ist u exponentiell beschränkt.

Aufgabe 3.9: Beweisen Sie Satz 3.43^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.9: Sei $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so dass

$$|u_0(x)| \leq Ae^{a|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

wobei $A \geq 0, a \in \mathbb{R}$.

Sei $u(t, x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-y)^2/4t} u_0(y) dy, t > 0, x \in \mathbb{R}^d$. Es ist zu zeigen, dass

a) $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^d),$

b) $u_t(t, x) = \Delta u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$

c) $\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = u_0(x)$

gleichmäßig auf beschränkten Mengen von \mathbb{R}^d .

Dazu betrachten wir die Funktion g die durch (3.75^{AU}) gegeben ist. Es ist also $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x-y) u_0(y) dy$. Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Nach der Young'schen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 - 2xy \geq |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \\ &\geq |x|^2 + |y|^2 - \frac{1}{2}|y|^2 - 2|x|^2 = \frac{1}{2}|y|^2 - 2|x|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$e^{-|x-y|^2/4t} \leq e^{-|y|^2/8t} e^{|x|^2/4t} \leq e^{-|y|^2/8\delta} e^{|x|^2/4t}.$$

Damit sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x-y), \frac{\partial g}{\partial x_j}(t, x-y)$ gleichmäßig auf $[\delta, \infty) \times \mathbb{R}^d$ durch $e e^{-|y|^2/8\delta}$ beschränkt. Da $\int_{\mathbb{R}^d} |u_0(y)| e^{-|y|^2/8\delta} dy < \infty$ folgt, dass $u \in C^\infty((\delta, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ und

$$\begin{aligned} u_t &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x-y) u_0(y) dy \\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j} &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y_j}(t, x-y) u_0(y) dy. \end{aligned}$$

Da $g_t = \Delta g$ ist $u_t = \Delta u$. Damit sind a) und b) gezeigt. Teil c) zeigt man ganz ähnlich wie Satz 3.41^{AU}. \triangle

Satz 3.53^{AU} (Eigenschaften und Rechenregeln).

Sei $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, dann gilt:

(i) Die Fourier-Transformation $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig mit $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

(ii) Linearität: Für $f_1, \dots, f_n \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right) = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{F}f_k.$$

(iii) Falls f stetig differenzierbar ist, $f' \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$, dann gilt

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}f(\omega). \quad (3.19)$$

(iv) Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| dt < \infty$, dann gilt

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}f(\omega) = (-i)\mathcal{F}(\cdot f(\cdot))(\omega). \quad (3.20)$$

(v) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}(f(\cdot - \alpha))(\omega) = e^{-i\alpha\omega} \mathcal{F}f(\omega)$.

(vi) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\mathcal{F}(f(\alpha \cdot))(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}f\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$.

Aufgabe 3.10: Beweisen Sie Satz 3.53^{AU}, (i), (ii), (v) und (vi).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.10: Die Fourier-Transformation ist nach Definition 3.50^{AU} gegeben durch

$$\mathcal{F}f(\omega) := \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(i) Die Stetigkeit ist klar. Wegen $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} e^{-i\omega t} = 0$ folgt $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n c_k f_k(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{F}f_k(\omega). \end{aligned}$$

(v) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt mit der Substitution $s := t - \alpha$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(\cdot - \alpha))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(s+\alpha)} ds \\ &= e^{-i\alpha\omega} \mathcal{F}f(\omega).\end{aligned}$$

(vi) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt mit der Substitution $s := \alpha t$ zunächst für den Fall $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}(f(\alpha \cdot))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\frac{\omega}{\alpha} s} ds.$$

Für $\alpha < 0$ kehrt sich der Integrationsbereich um und wir erhalten den multiplikativen Faktor $-\frac{1}{\alpha}$.

△

Satz 3.62*^{AU} (Existenz der Laplace-Transformation).

Die Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ sei *exponentiell beschränkt*, d.h., es ist $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$, für ein $M \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann existiert $\mathcal{L}f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$.

Aufgabe 3.11: Zeigen Sie Satz 3.62*^{AU} (Existenz der Laplace-Transformation).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.11: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ mit $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$ ($t \geq 0$), wobei $M \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$.

Dann ist $|f(t)e^{-st}| \leq M e^{-(\operatorname{Re} s - \gamma)t}$. Daher ist

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - \gamma}.$$

Damit existiert

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t)e^{-st} dt.$$

Bemerkung: Die exponentielle Beschränktheit ist nicht notwendig für die Existenz der Laplace-Transformation: Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, $F(t) = \int_0^t f(s) ds$.

a) Ist $|F(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$, mit $M \geq 0$, $\gamma \geq 0$, so existiert $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} f(t) dt$ für $\operatorname{Re} s > \gamma$.

b) Existiert $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-s_0 t} f(t) dt$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, so gibt es zu jedem $\gamma > 0$ mit $\gamma > \operatorname{Re} s_0$ ein M , so dass $|F(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$ und somit existiert die Laplace-Transformation falls $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Siehe [1, Theorem 1.4.3].

△

Aufgabe 3.12: Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ Anfangswerte für das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) &= u_0 && \text{in } \mathbb{R}, \\ u_t(0, \cdot) &= u_1 && \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von d'Alembert, dass die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ im Punkt (t, x) nur von den Anfangswerten $u_0(y)$, $u_1(y)$ aus dem Abhängigkeitsbereich $y \in A(t, x) := [x - c|t|, x + c|t|]$ abhängt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.12: Seien $u_0, u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Die Lösung der Wellengleichung mit Anfangsort u_0 und Anfangswert u_1 ist nach (3.7^{AU}) gegeben durch

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds.$$

Sei nun $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ und seien $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in C^1(\mathbb{R})$ Anfangsdaten derart, dass $u_0(y) = \tilde{u}_0(y)$, $u_1(y) = \tilde{u}_1(y)$ für alle $y \in [x - c|t|, x + c|t|]$.

Sei \tilde{u} die Lösung mit Anfangsdaten \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 . Dann ist

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x + ct) + \tilde{u}_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{u}_1(s) ds = u(t, x).$$

△

Aufgabe 3.13: Betrachten Sie die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.13: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) \varphi(x - s) ds = \int_0^{\infty} \varphi(x - s) ds = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds.$$

△

Aufgabe 3.14: Lösen Sie die partielle Differentialgleichung auf \mathbb{R}^2

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + x u_x - y u_y = 0$$

mittels einer geeigneten Variablentransformation. Wie kann man Eindeutigkeit erreichen?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.14: Man rechnet leicht nach, dass $v(x, y) := f(xy)$ und $w(x, y) := g(\frac{y}{x})$, $x \neq 0$, für $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ die obige Differentialgleichung erfüllen. Da wir diese auf \mathbb{R}^2 zu betrachten haben, kommt nur die erste Variablentransformation in Frage. Eindeutigkeit kann man erreichen, indem man z.B. die

Werte auf irgendeiner Parallelen zur x - oder zur y -Achse vorschreibt, nicht aber auf den Achsen selber. \triangle

Aufgabe 3.15: Bestimmen Sie die Lösung $u(t, x)$ des folgenden Anfangs-Randwertproblems:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 4u_{tt}, & t > 0, x \in (0,1), \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) &= \sin(2\pi x), & x \in [0,1], \\ u_t(0,x) &= x(x-1), & x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.15: Wir wenden Satz 3.6^{AU} auf $[a, b] = [0,1]$, $c = 2$, $u_0(x) := \sin(2\pi x)$, $u_1(x) := x(x-1)$ an. Wegen $u_0(0) = u_0''(0) = u_0(1) = u_0''(1) = 0$ und $u_1(0) = u_1(1) = 0$ sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, der also somit die eindeutige Lösbarkeit sichert.

Für den Fall $[x-2t, x+2t] \subset [0,1]$ benötigen wir keine periodische Fortsetzung und können eine Darstellung der Lösung direkt aus der Formel von d'Alembert beistimmen. Für den ersten Teil gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) &= \frac{1}{2}\sin(2\pi x + 4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi x - 4\pi t) \\ &= \sin(2\pi x) \cos(4\pi t) \end{aligned}$$

Für den Fall $[x-2t, x+2t] \subset [0,1]$ lautet der zweite Teil

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds &= \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} s(s-1) ds = \frac{1}{24} s^2(2s-3) \Big|_{s=x-2t}^{s=x+2t} \\ &= tx(x-1) + \frac{4}{3}t^3. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, dass diese Funktion tatsächlich nur im Bereich $\{(t, x) \in [0,1]^2 : 0 \leq x-2t \leq x+2t \leq 1\}$ eine Lösung ist, da andernfalls die Randbedingungen nicht erfüllt sind. Außerhalb dieses Bereiches geht man wie im Beweis von Satz 3.6^{AU} vor, indem man u_1 ungerade 2-periodisch fortsetzt und das obige Integral (mit Fallunterscheidungen) entsprechend auswertet. \triangle

Aufgabe 3.16: Lösen Sie mittels eines Fourier-Reihen-Ansatzes folgendes Problem für $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} &= 0, & t > 0, x \in (0, \ell), \\ u(t,0) &= u(t,\ell) = 0, & t > 0, \\ u_{xx}(t,0) &= u_{xx}(t,\ell) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) &= f(x), & x \in (0, \ell), \\ u_t(0,x) &= g(x), & x \in (0, \ell), \end{aligned}$$

wobei f, g ungerade Funktionen der Periode 2ℓ sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.16: Zunächst wählen wir wieder den Ansatz mit Separation der Variablen, also $u(t, x) = T(t) X(x)$. Dann gilt

$$0 = u_{tt}(t, x) + a^2 u_{xxxx}(t, x) = \ddot{T}(t) X(x) + a^2 T(t) X^{(4)}(x).$$

Dies führt auf die beiden separierten Gleichungen für

$$X^{(4)}(x) = \lambda^2 X(x), \quad (3.21)$$

$$\dot{T}(t) = -a^2 \lambda^2 T(t) \quad (3.22)$$

Die Randbedingungen für (3.21) lauten

$$X(0) = X(\ell) = 0, \quad X''(0) = X''(\ell) = 0.$$

Sinnvollerweise wählt man $\lambda = \lambda_k$ so, dass $\sqrt{\lambda} = \frac{2k\pi}{\ell}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die allgemeine Lösung von (3.21) lautet

$$c_1 \sin(\sqrt{\lambda_k}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda_k}x) + c_3 e^{\sqrt{\lambda_k}x} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda_k}x}.$$

Einsetzen in die Randbedingungen liefert $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Die allgemeine Lösung von (3.22) lautet

$$A_k \cos(a\lambda_k t) + B_k \sin(a\lambda_k t),$$

so dass wir durch Superposition folgende Reihendarstellung der Lösung erhalten:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(A_k \cos(a\lambda_k t) + B_k \sin(a\lambda_k t) \right) \sin(\sqrt{\lambda_k}x).$$

Wir gehen davon aus, dass wir gliedweise differenzieren dürfen und erhalten

$$u_t(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(-a \lambda_k A_k \sin(a\lambda_k t) + a \lambda_k B_k \cos(a\lambda_k t) \right) \sin(\sqrt{\lambda_k}x),$$

also

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x), \quad g(x) = u_t(0, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a \lambda_k B_k \cos(\sqrt{\lambda_k}x).$$

Somit können wir die noch unbekanntenen Koeffizienten als Fourier-Koeffizienten schreiben:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}x) dx \quad B_k = \frac{2}{a\lambda_k \ell} \int_0^\ell g(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}x).$$

Dies ist die gesuchte Reihen-Darstellung.

Man beachte, dass man die Formel von d'Alembert für die Lösung der Wellengleichung auch auf diese Art herleiten kann, indem man nun die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen benutzt und die Fourier-Koeffizienten einsetzt. Das geht hier allerdings nicht, da in x und t unterschiedliche Faktoren ($\sqrt{\lambda_k}$ bzw. λ_k) auftreten. \triangle

Satz (Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation).

Seien $f, g, f_1, \dots, f_n \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ alle exponentiell beschränkt mit gemeinsamer exponentieller Schranke γ . Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Abklingverhalten: $\lim_{\text{Re } s \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(s) = 0$
- (ii) Linearität: Es gilt $\mathcal{L}(\sum_{k=1}^n c_k f_k) = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{L}f_k$ für $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.
- (iii) Falls $f \in C^n(\mathbb{R})$, so dass $f^{(k)}$ für $1 \leq k \leq n$ exponentiell beschränkt ist mit exponentieller Schranke γ , dann gilt

$$\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k}, \quad \text{Re } s > \gamma.$$

- (iv) Es ist $(\frac{d}{ds})^n \mathcal{L}f(s) = (-1)^n \mathcal{L}((\cdot)^n f)(s)$, $\text{Re } s > \gamma$.
- (v) Translation: Für $\alpha > 0$ gilt $\mathcal{L}(f(\cdot - \alpha))(s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}f(s)$, $\text{Re } s > \gamma$.
- (vi) Faltungssatz: Für f, g wie oben gilt $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$.

Aufgabe 3.17: Beweisen Sie Satz 3.64*^{AU}, (i), (ii), (iv), (v) und (vi).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.17: Nach Definition 3.61*^{AU} lautet die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}f(s) = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

(i) Wegen $\lim_{\text{Re } s \rightarrow \infty} e^{st} = 0$ folgt $\lim_{\text{Re } s \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(s) = 0$.

(ii) Es gilt

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right)(s) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n c_k f_k(t) e^{-st} dt = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{L}f_k(s)$$

(iv) es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}f(s) &= \left(\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)(-1)^n t^n e^{-st} dt \\ &= (-1)^n \int_0^\infty f(t) t^n e^{-st} dt = (-1)^n \mathcal{L}((\cdot)^n f)(s). \end{aligned}$$

(vi) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty (f * g)(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\tau) /, g(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) /, g(t - \tau) e^{-st} d\tau dt, \end{aligned}$$

da $f, g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, also $f(\tau) = g(\tau) = 0$ für $\tau < 0$. Nun folgt die Behauptung genau wie im Beweis von Satz 3.55^{AU} für die Fourier-Transformation.

△

Aufgabe 3.18: Zeigen Sie:

$$(a) a(t) := 1, \mathcal{L}[a](s) = s^{-1}$$

$$(b) b(t) := e^{-t}, \mathcal{L}[b](s) = (1 + s)^{-1}$$

$$(c) f(t, x) := -(t^2 + x)e^{-tx}, \mathcal{L}[f(\cdot, x)](s) = -2(s + x)^{-3} - \frac{x}{s+x}$$

$$(d) \mathcal{U}(s, x) := (s + x)^{-1}, \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{U}(\cdot, x)](t) = e^{-tx}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.18:

(a) Es gilt $a'(t) = 0$ und damit folgt aus Satz 3.62* (iv) $0 = \mathcal{L}[a'](s) = s \mathcal{L}[a](s) - a(0) = s \mathcal{L}[a](s) - 1$. woraus die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\mathcal{L}[b](s) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s+1)} dt = \mathcal{L}[a](s+1) = (1 + s)^{-1}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(\cdot, x)] &= - \int_0^\infty (t^2 + x) e^{-tx} e^{-st} dt = - \int_0^\infty (t^2 + x) e^{-t(s+x)} dt \\ &= - \int_0^\infty t^2 e^{-t(s+x)} dt - \int_0^\infty x e^{-t(s+x)} dt. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term gilt

$$\int_0^\infty x e^{-t(s+x)} dt = x \mathcal{L}[a](s+x) = \frac{x}{s+x}.$$

Für den ersten Term wenden wir zweimal partielle Integration an und beachten, dass die Randterme jeweils verschwinden:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^2 e^{-t(s+x)} dt &= 2 \int_0^\infty \frac{t}{s+x} e^{-t(s+x)} dt = 2 \int_0^\infty \frac{1}{(s+x)^2} e^{-t(s+x)} dt \\ &= \frac{2}{(s+x)^2} \mathcal{L}[a](s+x) = \frac{2}{(s+x)^3}. \end{aligned}$$

(d) Sei $g(t, x) := e^{-tx}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(\cdot, x)](s) &= \int_0^\infty e^{-tx} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(x+s)} dt = \mathcal{L}[a](s+x) \\ &= (s+x)^{-1}.\end{aligned}$$

△

Aufgabe 3.19: (Harmonische Funktionen sehen keine Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $x_0 \in \Omega$ und $\Omega^* := \Omega \setminus \{x_0\}$. Mit $\mathcal{H}(\Omega) := \{u \in C^2(\Omega) : \Delta u = 0\}$ bezeichnen wir den Raum der harmonischen Funktionen auf Ω . Wir wollen zeigen, dass die Mengen $\mathcal{H}(\Omega^*) \cap C(\Omega)$ und $\mathcal{H}(\Omega)$ übereinstimmen. Sei dazu $B := B(x_0, R)$ eine Kugel im \mathbb{R}^d und $B^* := B \setminus \{x_0\}$.

- (a) Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in C^2(0, R)$ mit $rf''(r) + f'(r) = 0$ für $r \in (0, R)$.
- (b) Sei $u \in \mathcal{H}(B^*) \cap C(\bar{B})$ und $u|_{\partial B} = 0$. Zeigen Sie, dass u invariant unter Rotationen um x_0 ist: Es gilt $u(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_2)$ für alle y_1 und y_2 aus \mathbb{R}^2 mit $|y_1| = |y_2| \leq R$.
- (c) Ist $w \in C^2(B^*)$ invariant unter Rotationen um x_0 , so gibt es eine Funktion $\tilde{w} \in C^2(0, R)$ mit $\tilde{w}(|x - x_0|) = w(x)$ für $x \in B^*$. Für diese gilt $\Delta w(x) = \tilde{w}''(r) + \frac{1}{r}\tilde{w}'(r)$ mit $r := r(x) := |x - x_0|$.
- (d) Seien u und v in $\mathcal{H}(B^*) \cap C(\bar{B})$ mit $u|_{\partial B} = v|_{\partial B}$. Zeigen Sie, dass $u = v$ gilt. Tipp: Unter Verwendung der vorigen Aufgabenteile kann man zeigen, dass $w := u - v$ auf B identisch verschwindet.
- (e) Sei $u \in \mathcal{H}(B^*) \cap C(\bar{B})$. Zeigen Sie, dass $u \in \mathcal{H}(B)$. Somit ist Ω^* nicht Dirichlet-regulär.
- (f) Sei $u \in \mathcal{H}(\Omega^*)$. Zeigen Sie, dass es genau dann eine Fortsetzung $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ von u auf Ω gibt, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ existiert.
- (g) Stimmt die Aussage des vorigen Aufgabenteils auch für $d = 1$? Anders formuliert: Ist jede Funktion in $\mathcal{H}((-1, 0) \cup (0, 1)) \cap C[-1, 1]$ in $\mathcal{H}(-1, 1)$?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.19:

- (a) Die Ableitung $g = f'$ von f erfüllt die Gleichung $rg'(r) = -g(r)$. Mit der Lösungsformel für Gleichungen in getrennten Veränderlichen erhält man, dass $f'(r) = g(r) = cr^{-1}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt. Integriert man diese Gleichung, ergibt sich $f(r) = c \log(r) + d$ für ein $d \in \mathbb{R}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf ist jede Lösung der Differentialgleichung von dieser Form.
- (b) Seien y_1 und y_2 wie in der Aufgabenstellung. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $A = (a_{ij})$ mit $Ay_1 = y_2$. Sei $v(x) := u(x_0 + A(x - x_0))$. Dann ist

$v(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_2)$. Offenbar gilt $v|_{\partial B^*} = u|_{\partial B^*}$. Nach der Kettenregel liegt v in $C^2(B^*)$ mit

$$\nabla v(x) = \nabla u(x_0 + A(x - x_0))A.$$

Daher ist die Hesse-Matrix H_v von v , also die Ableitung von $(\nabla v)^T$, durch

$$H_v(x) = A^T H_u(x_0 + A(x - x_0))A$$

gegeben. Nutzt man nun $A^T A = I$ und die Rechenregel $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ für die Spur einer Matrix aus, so ergibt sich

$$\Delta v(x) = \text{Spur } H_v(x) = \text{Spur } H_u(x_0 + A(x - x_0)) = \Delta u(x_0 + A(x - x_0)) = 0.$$

Also ist v ebenso wie u eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{auf } B^*, \\ w|_{\partial B^*} = u|_{\partial B^*}, \end{cases}$$

woraus mit der Eindeutigkeit der Lösung $u = v$ folgt. Also gilt

$$u(x_0 + y_2) = u(x_0 + Ay_1) = v(x_0 + y_1) = u(x_0 + y_1),$$

was die Behauptung zeigt.

- (c) Wegen Rotationsinvarianz ist die Definition $\tilde{w}(r) := w(x)$ für ein x mit $|x - x_0| = r$ eine wohldefinierte Zuordnungsvorschrift. Da insbesondere $\tilde{w}(r) = w(x_0 + re_1)$ gilt, ist \tilde{w} nach der Kettenregel zweimal stetig differenzierbar. Wendet man die Kettenregel auf die Gleichung $\tilde{w}(r) = w(x)$ mit $r = r(x)$ an und nutzt

$$D_i r(x) = \frac{x_i - x_{0,i}}{r(x)}$$

aus, so erhält man

$$\begin{aligned} D_i w(x) &= \tilde{w}'(r) \frac{x_i - x_{0,i}}{r} \\ D_{ii} w(x) &= \tilde{w}''(r) \frac{(x_i - x_{0,i})^2}{r^2} + \tilde{w}'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - x_{0,i})^2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

und damit durch Addition der Gleichungen

$$\Delta w(x) = \tilde{w}''(r) + \tilde{w}'(r) \frac{1}{r}$$

wie behauptet.

- (d) Sei $w := u - v$. Dann erfüllt w die Voraussetzungen von Aufgabenteil b) und ist somit rotationsinvariant. Wähle \tilde{w} wie in Aufgabenteil c). Dann erfüllt \tilde{w}

die Differentialgleichung in Aufgabenteil a), woraus folgt, dass es ein c und d mit

$$\tilde{w}(|x - x_0|) = c \log(|x - x_0|) + d$$

gibt. Da w stetig in x_0 ist, ist \tilde{w} bei 0 insbesondere beschränkt. Dies ist nur dann möglich, wenn $c = 0$ gilt. Zudem ist $\tilde{w}(R) = 0$, da w auf ∂B verschwindet. Also muss $\tilde{w} = 0$ gelten. Dies zeigt $w = 0$ und somit $u = v$.

(e) Nach Satz 3.30^{AU} existiert eine Funktion $v \in \mathcal{H}(B) \cap C(\bar{B})$ mit $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$. Nach Aufgabenteil d) gilt dann $u = v \in \mathcal{H}(B)$. Nehmen wir nun an, Ω^* wäre Dirichlet-regulär. Dann gäbe es eine Funktion $u \in \mathcal{H}(\Omega^*) \cap C(\bar{\Omega}^*)$ mit $u(x_0) = 1$ und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Also wäre nach dem Gezeigten sogar $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Nach Korollar 3.27^{AU} ist dann $u = 0$ auf $\bar{\Omega}$ im Widerspruch zu $u(x_0) = 1$.

(f) Gibt es eine solche Fortsetzung v , so existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0)$$

natürlich. Existiert umgekehrt dieser Grenzwert, so gibt es zumindest eine stetige Fortsetzung v von u , die mittels $v(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ definiert werden kann. Weil Ω offen ist, gibt es $R > 0$ mit $B = B(x_0, R) \Subset \Omega$. Dann ist offenbar $v|_B \in \mathcal{H}(B^*) \cap C(\bar{B})$ und somit nach Aufgabenteil e) $v|_B \in \mathcal{H}(B)$. Dies zeigt $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ und damit die Behauptung.

(g) Nein. Ein Gegenbeispiel ist $u(x) = |x|$. **Bemerkung:** Die Aussage ist aber für jede Dimension größer als 1 richtig. Der Beweis kann genau wie in zwei Dimensionen geführt werden.

△

Aufgabe 3.20: Seien $f_n \in C^2[0,1]$, $f, g \in C[0,1]$ derart, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'' = g$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen eine Funktion $h \in C[0,1]$ konvergiert, und schließen Sie daraus, dass $f \in C^2[0,1]$, $f' = h$, $f'' = g$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.20: Seien $f_n \in C^2[0,1]$, $f, g \in C[0,1]$ derart, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'' = g$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist für $x, y \in [0,1]$

$$f_n(y) = f_n(x) + \int_x^y f_n'(s) ds \quad \text{und}$$

$$f_n'(s) = f_n'(x) + \int_x^s f_n''(t) dt.$$

Setzen wir f'_n in die erste Formel ein, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned} f_n(y) &= f_n(x) + \int_x^y f'_n(t) dt + \int_x^y \int_x^s f''_n(t) dt ds \\ &= f_n(x) + (y-x)f'_n(x) + \int_x^y \int_t^y f''_n(t) ds dt \\ &= f_n(x) + (y-x)f'_n(x) + \int_x^y (y-t)f''_n(t) dt. \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Fubini 5.8^{AU} benutzt. Die Formel

$$f_n(y) = f_n(x) + (y-x)f'_n(x) + \int_x^y (y-t)f''_n(t) dt$$

ist nichts anderes als die Taylor-Formel der Ordnung zwei. Sie zeigt, dass $f'_n(x)$ gleichmäßig in $x \in [y-\delta, y+\delta]$ konvergiert, $\delta > 0$. Wählen wir z.B. einmal $y = 0$ und einmal $y = 1$, so sehen wir, dass f'_n gleichmäßig gegen eine Funktion $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Diese ist somit stetig und mit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir aus obiger Formel

$$f(y) = f(x) + (y-x)h(x) + \int_x^y (y-t)g(t) dt.$$

Damit ist f differenzierbar und $f'(y) = h(x) + \int_x^y g(t) dt$ für alle $x, y \in [0,1]$. Folglich ist $f \in C^2[0,1]$ und $f'' = g$. Setzen wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Identität ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(y) &= h(x) + \int_x^y f''(t) dt \\ &= h(x) + f'(y) - f'(x). \end{aligned}$$

Somit ist $h = f'$. △

4 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 4

Aufgabe 4.1: Zeigen Sie, dass der Raum $\ell_2(I)$ bzgl. des Skalarproduktes $(x, y) := \sum_{n \in I} x_n \overline{y_n}$ ein Hilbert-Raum ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.1: Wir wählen $I = \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass ℓ^2 vollständig ist. Sei $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in ℓ_2 , wobei $x^n = (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$. Da $|y_k| \leq \|y\|_{\ell_2}$ für jedes $y \in \ell_2$, ist $(x_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Damit existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^n =: x_k$ in \mathbb{K} . Wir zeigen nun, dass

- $x := (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ und
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$ im Sinne von ℓ_2 .

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|x^n - x^m\|_{\ell_2} \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Es ist also

$$\sum_{k=1}^K |x_k^n - x_k^m|^2 \leq \varepsilon^2$$

für alle $n, m \geq n_0$ und alle $K \in \mathbb{N}$. Indem wir $m \rightarrow \infty$ schicken, sehen wir, dass

$$\sum_{k=1}^K |x_k^n - x_k|^2 \leq \varepsilon^2$$

für alle $K \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Damit ist $x^n - x \in \ell^2$ für $n \geq n_0$ und somit ist $x \in \ell^2$. Ferner ist für $n \geq n_0$,

$$\|x^n - x\|_{\ell_2}^2 = \sup_K \sum_{k=1}^K |x_k^n - x_k|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Damit ist $\|x^n - x\|_{\ell_2}^2 \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. △

Aufgabe 4.2: Seien H_1, H_2 Hilbert-Räume, $T : H_1 \rightarrow H_2$ linear. Auf H_1 und H_2 betrachten wir jeweils zwei Arten der Konvergenz: die Norm-Konvergenz und die schwache Konvergenz. Damit gibt es vier Möglichkeiten, die Stetigkeit (d.h. Folgen-Stetigkeit) von T zu definieren. Welche von diesen Vier sind gleich?

Anleitung: Benutzen Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen (siehe Satz A.3^{AU}).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.2: Sei $T : H_1 \rightarrow H_2$ linear, wobei H_1, H_2 Hilbert-Räume sind. Wir betrachten die folgenden 4 möglichen Stetigkeitsdefinitionen für T :

$$(a) x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx;$$

$$(b) x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx;$$

$$(c) x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx;$$

$$(d) x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx.$$

Dann sind (a), (b), (d) äquivalent; es gilt (c) \Rightarrow (a), aber im Allgemeinen (a) $\not\Rightarrow$ (c).

Beweis: Aussage (a) ist die Norm-Stetigkeit von T .

(a) \Rightarrow (d). Sei T Norm-stetig. Dann gibt es zu jedem $y \in H_2$ genau ein $T^*y \in H_1$, so dass

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad x \in H_1.$$

Das folgt unmittelbar aus dem Satz von Riesz-Fréchet (Satz 4.21^{AU}), da ja $x \mapsto (Tx, y)$ eine stetige Linearform auf H_1 definiert. Sei nun $x_n \rightarrow x$ und sei $y \in H_2$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, T^*y) = (x, T^*y) = (Tx, y).$$

Damit gilt $Tx_n \rightarrow Tx$.

(d) \Rightarrow (b) folgt aus der Tatsache, dass die Norm-Konvergenz die schwache Konvergenz impliziert.

(b) \Rightarrow (a). Wir benutzen den Satz vom abgeschlossenen Graphen, um die Stetigkeit von T zu zeigen. Sei $x_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y$. Wir müssen zeigen, dass $Tx = y$. Sei $z \in H_2$ beliebig. Aus der Voraussetzung (b) folgt, dass $Tx_n \rightarrow Tx$. Damit ist

$$(Tx, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n, z) = (y, z).$$

Da $z \in H_2$ beliebig ist, folgt, dass $Tx = y$. Wir haben die Äquivalenz von (a), (b) und (d) gezeigt.

(c) bedeutet gerade, dass T kompakt ist (Satz 4.39^{AU}). Ist $\dim H_1 = \infty$ und $H_2 = H_1$, so ist die Identität stetig, aber nicht kompakt. \triangle

Aufgabe 4.3: (Polarisations-Identität.)

a) Sei E ein reeller Vektorraum und $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch. Zeigen Sie: $a(u, v) = \frac{1}{4}(a(u+v) - a(u-v))$, $u, v \in E$. Hier ist $a(u) := a(u, u)$, $u \in E$.

b) Seien E_1, E_2 unitäre Räume und sei $T : E_1 \rightarrow E_2$ linear. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$(i) (Tu, Tv) = (u, v) \text{ für alle } u, v \in E_1.$$

$$(ii) T \text{ ist isometrisch, d.h. } \|Tu\| = \|u\| \text{ für alle } u \in E_1.$$

Somit ist T genau dann isometrisch, wenn T das Skalarprodukt erhält.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.3:

a) Sei $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch. Dann ist

$$\begin{aligned} a(u+v) - a(u-v) &= a(u+v, u+v) - a(u-v, u-v) \\ &= a(u) + 2a(u, v) + a(v) - [a(u) + a(v) - 2a(u, v)] \\ &= 4a(u, v). \end{aligned}$$

b) Sei $T : E_1 \rightarrow E_2$ linear derart, dass $\|Tu\|_{E_2} = \|u\|_{E_1}$, $u \in E_1$; d.h. $(Tu, Tu)_{E_2} = (u, u)_{E_1}$, $u \in E_1$. Da T linear ist, folgt aus a):

$$\begin{aligned} (Tu, Tv)_{E_2} &= \frac{1}{4}(\|Tu + Tv\|_{E_2}^2 - \|Tu - Tv\|_{E_2}^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|T(u+v)\|_{E_2}^2 - \|T(u-v)\|_{E_2}^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|u+v\|_{E_1}^2 - \|u-v\|_{E_1}^2) \\ &= (u, v)_{E_1}. \end{aligned}$$

Das zeigt (ii) \Rightarrow (i). Die umgekehrte Richtung ist trivial.

△

Aufgabe 4.4: (Vervollständigung.) Sei E ein separabler reeller Prä-Hilbert-Raum und sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E .

- a) Betrachten Sie die Abbildung $J : E \rightarrow \ell_2$, $J(u) = ((u, e_n)_E)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass J linear und isometrisch ist und dichtes Bild hat.
- b) Folgern Sie: Es gibt einen Hilbert-Raum H , so dass E ein dichter Unterraum von H ist. Hinweis: Identifizieren sie E und $j(E)$.
- c) Eindeutigkeit: Seien H_1, H_2 Hilbert-Räume, $J_k : E \rightarrow H_k$ linear, isometrisch mit dichtem Bild, $k = 1, 2$. Zeigen Sie: Es gibt einen unitären Operator $U : H_1 \rightarrow H_2$, so dass $UJ_1x = J_2x$ für alle $x \in H_1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.4: Sei E ein separabler, reeller Prä-Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Definiere für $u \in E$,

$$Ju = ((u, e_n)_E)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dann ist $Ju \in \ell_2$ für alle $u \in E$ (siehe Satz 4.9^{AU}). Damit ist $J : E \rightarrow \ell_2$ linear und isometrisch (Parseval'sche Identität). Aus Aufgabe 4.3^{AU} folgt, dass $(Ju, Jv)_{\ell_2} = (u, v)_E$ für alle $u, v \in E$. Da $Je_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0 \dots)$, ist das Bild von J dicht in ℓ_2 .

b) Falls wir E mit $j(E)$ identifizieren, wird E ein dichter Unterraum von ℓ_2 und das gegebene Skalarprodukt auf E stimmt mit dem von ℓ_2 induzierten überein. Das ist gerade die Aussage von a).

- c) Seien H_1, H_2 Hilbert-Räume, $J_k : E \rightarrow H_k$ isometrisch mit dichtem Bild, $k = 1, 2$. Definiert $U_0 : J_1 E \rightarrow J_2 E$ durch $U_0 J_1 x = J_2 x$, $x \in E$. Dann ist U_0 linear und isometrisch. Nach Satz A.2^{AU} hat U_0 eine eindeutige, stetige Fortsetzung $U : H_1 \rightarrow H_2$. Für $f \in H_1$ gibt es $x_n \in E$, so dass $J_1 x_n \rightarrow f$ in H_1 . Damit ist

$$\|Uf\|_{H_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_0 J_1 x_n\|_{H_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_2 x_n\|_{H_2} = \|f\|_{H_1}.$$

Die Abbildung U ist also isometrisch. Daraus folgt, dass Bild U abgeschlossen ist. Da Bild $U \supset \text{Bild } U_0 = J_2 E$, ist Bild U dicht in H_2 . Folglich ist Bild $U = H_2$.

△

Aufgabe 4.5: Sei E ein normierter reeller Vektorraum und $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear. $a(\cdot, \cdot)$ heißt stetig, falls $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \Rightarrow a(u_n, v_n) \rightarrow a(u, v)$.

- a) Zeigen Sie, dass a genau dann stetig ist, wenn es $C \geq 0$ gibt derart, dass

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad u, v \in E.$$

- b) Sei a symmetrisch und $a(u) \geq 0$, $u \in E$. Zeigen Sie, dass a genau dann stetig ist, wenn $u_n \rightarrow u \Rightarrow a(u_n) \rightarrow a(u)$.
Benutzen Sie 4.26^{AU}.

- c) Sei H ein Hilbert-Raum und $T : H \rightarrow H$ linear und symmetrisch, d.h. $(Tu, v) = (u, Tv)$, $u, v \in H$. Zeigen Sie, dass T stetig ist.
Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

- d) Sei H ein Hilbert-Raum, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch derart, dass $u_n \rightarrow u \Rightarrow a(u_n, v) \rightarrow a(u, v)$ für alle $v \in H$. Zeigen sie, dass a) stetig ist. Benutzen Sie c).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.5:

- a) Falls es kein $C > 0$ gibt mit $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$ für alle $u, v \in E$, so existieren $u_n, v_n \in E$ mit $|a(u_n, v_n)| > n^2 \|u_n\| \|v_n\|$. Für $x_n = \frac{1}{n} \frac{1}{\|u_n\|} u_n$, $y_n = \frac{1}{n} \frac{1}{\|v_n\|} v_n$ gilt dann $|a(x_n, y_n)| > 1$ aber $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$. Somit ist a nicht stetig. Umgekehrt folgt aus der Ungleichung, dass für $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$,

$$\begin{aligned} |a(u_n, v_n) - a(u, v)| &= |a(u_n, v_n - v) + a(u_n - u, v)| \\ &\leq C \|u_n\| \|v_n - v\| + C \|u_n - u\| \|v\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit $n \rightarrow \infty$.

- b) Sei a symmetrisch $a(u) \geq 0$ für alle $u \in E$ und es gelte $u_n \rightarrow u \Rightarrow a(u_n) \rightarrow a(u)$. Wir zeigen, dass a stetig ist. Sei $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$. Dann gilt nach Satz 4.26^{AU}

$$\begin{aligned} |a(u_n, v_n) - a(u, v)| &= |a(u_n, v_n - v) + a(u_n - u, v)| \\ &\leq a(u_n)^{\frac{1}{2}} a(v_n - v)^{\frac{1}{2}} + a(u_n - u)^{\frac{1}{2}} a(v)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit $n \rightarrow \infty$.

- c) Sei $T : H \rightarrow H$ linear und symmetrisch. Sei $u_n \rightarrow u, Tu_n \rightarrow v$. Wir zeigen, dass $Tu = v$. Sei $w \in H$. Dann gilt

$$(Tu, w) = (u, Tw) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, Tw) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tu_n, w) = (v, w).$$

Da $w \in H$ beliebig ist, folgt, dass $Tu = v$. Die Stetigkeit folgt nun aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

- d) Sei $v \in H$. Nach Voraussetzung ist $a(\cdot, v)$ eine stetige Linearform auf H . Damit gibt es nach dem Satz von Riesz-Fréchet ein eindeutig bestimmtes $Tv \in H$ derart, dass

$$a(u, v) = (u, Tv), \quad u \in H.$$

Aus dieser Identität folgt, dass T linear ist. Ferner ist $(Tu, v) = (v, Tu) = a(v, u) = a(u, v) = (u, Tv)$. Somit ist T symmetrisch. Aus Teil c) der Aufgabe folgt, dass T stetig ist. Folglich ist

$$|a(u, v)| = |(u, Tv)| \leq \|u\| \|Tv\| \leq \|T\| \|u\| \|v\|.$$

△

Aufgabe 4.6: Betrachten Sie die Operatoren aus Beispiel 4.42^{AU}. Bestimmen Sie $\ker A_0, \ker A_1$ und $\ker B$. Welcher der Operatoren ist invertierbar?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.6: Die Operatoren A_0, A_1, B auf $X := L_2(0,1)$ sind folgendermaßen definiert:

- a) $D(A_0) := \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}, A_0 u = -u''$;
 b) $D(A_1) := \{u \in C^2[0,1] : u'(0) = u'(1) = 0\}, A_1 u = -u''$;
 c) $D(B) := C^2[0,1], Bu = -u''$.

Damit ist $A_0 \subset B$ und $A_1 \subset B$. Sei $u \in \ker B$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $u(x) = ax + b$. Damit ist $\ker B$ gerade der Raum der affinen Funktionen. Ist solch ein u sogar in $D(A_0)$, so ist $b = u(0) = 0$ und $a = u(1) = 0$, also ist $u \equiv 0$. Ist solch ein u in $D(A_1)$, so ist $a = u'(0) = 0$ und damit $u(x) \equiv b$ für alle $x \in [0,1]$. Es ist also $\ker A_0 = \{0\}$ und $\ker A_1 = \{c\mathbb{1}_{[0,1]} : c \in \mathbb{R}\}$. Die Operatoren A_1 und B sind

nicht injektiv und damit nicht invertierbar. Da jede Funktion im Bild von A stetig ist, ist A_0 nicht surjektiv. Damit ist auch A_0 nicht invertierbar. \triangle

Aufgabe 4.7: Sei A ein Operator auf H . Wir sagen, dass A beschränkt ist, falls es $c \geq 0$ gibt, so dass $\|Au\| \leq c\|u\|$ für alle $u \in D(A)$; vgl. Anhang A.1^{AU}.

- Sei A invertierbar. Zeigen Sie, dass A genau dann beschränkt ist, wenn $D(A)$ abgeschlossen in H ist.
- Sei A invertierbar, so dass $A^{-1} : H \rightarrow H$ kompakt ist. Zeigen Sie, dass A genau dann beschränkt ist, wenn $\dim H < \infty$.
- Wir sagen, dass A abgeschlossen ist, falls der Graph $G(A) := \{(u, Au) : u \in D(A)\}$ von A in $H \times H$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie: Ist A invertierbar, so ist A abgeschlossen.
- Sei $D(A) = H$. Zeigen Sie, dass A genau dann beschränkt ist, wenn A abgeschlossen ist.
- Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist genau dann, wenn $D(A)$ bzgl. der Norm $\|u\|_A^2 := \|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2$ vollständig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.7: Sei A ein Operator auf H mit Definitionsbereich $D(A)$.

- Sei A invertierbar, d.h. $A : D(A) \rightarrow H$ ist bijektiv und $A^{-1} : H \rightarrow H$ stetig. Sei $D(A)$ abgeschlossen in H . Dann ist $D(A)$ ein Hilbert-Raum bezüglich des Skalarproduktes von H und $A^{-1} : H \rightarrow D(A)$ ist stetig. Nach dem Satz vom stetigen Inversen (A.4^{AU}) ist $A = (A^{-1})^{-1}$ stetig; d.h. es gibt $c \geq 0$, so dass $\|Ax\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in D(A)$.
Sei umgekehrt A beschränkt. Dann ist A ein Isomorphismus von $D(A)$ nach H , wobei $D(A)$ die Norm von H trägt. Da H vollständig ist, ist es auch $D(A)$. Damit ist $D(A)$ abgeschlossen. Wir können das aber auch direkt beweisen: Sei $u \in \overline{D(A)}$. Dann gibt es $u_n \in D(A)$, so dass $u_n \rightarrow u$ in H . Da $\|Au_n - Au_m\| \leq c\|u_n - u_m\|$, ist $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H . Sei $v = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n$. Da A invertierbar ist, folgt, dass $A^{-1}v = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{-1}(Au_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Also ist $u \in D(A)$ und $Au = v$.
- Sei A invertierbar und $A^{-1} : H \rightarrow H$ kompakt. Ist A beschränkt, so ist nach a) $D(A)$ abgeschlossen in H . Für $x \in D(A)$ ist $x = A^{-1}(Ax)$. Damit ist die Identität auf $D(A)$ kompakt (denn ist $x_n \in D(A)$, $\|x_n\| \leq c_1$, so ist $\|Ax_n\| \leq c \cdot c_1$; da A^{-1} kompakt ist, hat $x_n = A^{-1}Ax_n$ eine konvergente Teilfolge). Beispiel 4.32^{AU} zeigt, dass $\dim D(A) < \infty$. Aber A ist eine bijektive lineare Abbildung von $D(A)$ nach H . Damit ist auch H endlich-dimensional. Ist umgekehrt $\dim H < \infty$, so ist jede lineare Abbildung von H nach H kompakt, da ja abgeschlossene, beschränkte Teilmengen von H kompakt sind.

- c) Sei A invertierbar. Sei $x_n \in D(A)$, so dass $x_n \rightarrow x$ und $Ax_n \rightarrow y$. Wir müssen zeigen, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$. Da A invertierbar ist, folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$, dass $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A^{-1}y$. Damit ist $x \in D(A)$ und $Ax = y$.
- d) Das ist der Satz vom abgeschlossenen Graphen Satz A.3^{AU}.
- e) Sei A abgeschlossen und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_A$. Da $\|y\| \leq \|y\|_A$ und $\|Ay\| \leq \|y\|_A$, $y \in D(A)$, folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in H sind. Sei $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$. Da A abgeschlossen ist, folgt, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$. Damit gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_A = 0$. Sei umgekehrt $(D(A), \|\cdot\|_A)$ vollständig. Wir zeigen, dass A abgeschlossen ist. Sei $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$, $Ax_n \rightarrow y$. Da $\|x_n - x_m\|_A^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|Ax_n - Ax_m\|^2$, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $D(A)$. Also gibt es $z \in D(A)$, so dass $\|x_n - z\|^2 + \|Ax_n - Az\|^2 = \|x_n - z\|_A^2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Damit ist $z = x$ und $Az = y$.

△

Aufgabe 4.8: Sei H ein Hilbert-Raum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H . Sei $\lambda_n \in (0, \infty)$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

- a) Sei $V := \{u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, e_n)_H^2 < \infty\}$. Zeigen Sie, dass $a(u, v) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, e_n)_H (v, e_n)_H$ ein Skalarprodukt auf V definiert bzgl. dessen V ein Hilbert-Raum ist.
- b) Zeigen Sie, dass V kompakt in H eingebettet ist.
- c) Wählen Sie $H = \ell_2$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit der 1 an der n -ten Stelle. Sei A der zu $a(\cdot, \cdot)$ assoziierte Operator. Zeigen Sie, dass gilt $D(A) = \{x \in \ell_2 : (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2\}$, $Ax = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Somit ist A ein Diagonaloperator.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.8: Sei H ein Hilbert-Raum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H . Sei $0 < \lambda_n < \infty$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

- a) Sei $V := \{u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, e_n)_H^2 < \infty\}$. Dann definiert

$$\begin{aligned} J : V &\rightarrow \ell_2 \\ u &\mapsto (\sqrt{\lambda_n} (u, e_n)_H)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

eine bijektive, lineare Abbildung. Die Inverse von J ist offenbar gegeben durch $J^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} x_n e_n$ mit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$. Es ist

$$\begin{aligned} (Ju, Jv)_{\ell_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (u, e_n)_H \sqrt{\lambda_n} (v, e_n)_H \\ &= a(u, v). \end{aligned}$$

Damit ist a ein Skalarprodukt auf V und J ist unitär. Insbesondere ist J isometrisch. Da ℓ_2 vollständig ist, ist es auch V .

b) V ist kompakt in H eingebettet. Zunächst einmal gilt für $u \in V$,

$$\begin{aligned}\|u\|_V^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, e_n)_H^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)_H^2 \\ &= \lambda_1 \|u\|_H^2.\end{aligned}$$

Damit ist $V \subset H$ und die Einbettung ist stetig. Sie ist sogar kompakt. Um das zu zeigen, wählen wir $u_m \in V$, so dass $u_m \rightharpoonup u$ in V . Wir müssen zeigen, dass $u_m \rightarrow u$ in H (Satz 4.39^{AU}). OBdA können wir annehmen, dass $u = 0$ (sonst ersetzen wir u_n durch $u_n - u$). Da $u_m \rightarrow 0$, gibt es $c \geq 0$, so dass $\|u_m\|_V \leq c$ für alle $m \in \mathbb{N}$ (Satz 4.36^{AU}). Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{\lambda_{n_0}} \leq \varepsilon$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{\infty} (u_m, e_n)_H^2 &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n (u_m, e_n)_H^2 \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n (u_m, e_n)_H^2 \\ &\leq \varepsilon \|u_m\|_V^2 \\ &\leq \varepsilon c^2.\end{aligned}$$

Da $u_m \rightarrow 0$ in V gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m, e_n)_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} a(u_m, e_n) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_V^2 \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_0-1} (u_m, e_n)_H^2 + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} (u_m, e_n)_H^2 \leq \varepsilon c^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt, dass $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_V^2 = 0$.

c) Sei $H = \ell_2$ und $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0 \dots)$ die kanonische Einheitsfolge. Damit ist $V = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2 < \infty\}$ und $a(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n$, $x, y \in V$. Sei A der zu a assoziierte Operator auf ℓ_2 . Sei $x \in D(A)$, $Ax = y$. Nach Definition des assoziierten Operators (siehe (4.19^{AU}) im Buch) heißt das, dass

$$a(x, z) = (y, z)_{\ell_2} \quad (z \in V).$$

Insbesondere erhalten wir für $z = e_m$,

$$\lambda_m x_m = y_m.$$

Damit ist also $y = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei umgekehrt $x \in \ell_2$, so dass $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$; d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 x_n^2 < \infty$. Dann gilt auch $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2 < \infty$; d.h. $x \in V$. Ferner ist für $z \in V$,

$$\begin{aligned} a(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n z_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n \\ &= (y, z)_{\ell_2}. \end{aligned}$$

Damit ist $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

△

Aufgabe 4.9: Wir betrachten die Situation, die im Satz 4.46^{AU} beschrieben wird. Sei λ ein Eigenwert von A . Zeigen Sie:

- $\ker(A - \lambda I)$ ist endlich-dimensional;
- für $f \in H$ hat (4.24^{AU}) genau dann eine Lösung, wenn $(f, e_m)_H = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_m = \lambda$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.9: Seien H, V reelle Hilbert-Räume, $\dim H = \infty$, so dass V kompakt in H eingebettet ist. Sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, stetige, H -elliptische Bilinearform. Sei A der zu a assoziierte Operator. Nach Satz 4.46^{AU} (Spektralsatz) hat H eine Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $e_n \in D(A)$ und $Ae_n = \lambda_n e_n$, wobei $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Ferner ist

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in V : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (u, e_n)_H^2 < \infty \right\} \\ Au &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, e_n)_H e_n. \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A .

- Dann ist $\ker(\lambda - A)$ endlich-dimensional. Nach Bemerkung 4.47^{AU} b) gibt es nämlich ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\lambda = \lambda_m$. Damit ist

$$\begin{aligned} \ker(\lambda - A) &= \{u \in D(A) : \lambda u - Au = 0\} \\ &= \left\{ u \in D(A) : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) (u, e_n)_H e_n = 0 \right\} \\ &= \{u \in D(A) : (u, e_n) = 0 \text{ falls } \lambda_n \neq \lambda_m\}. \end{aligned}$$

Die Menge $I = \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \lambda_m\}$ ist endlich, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Damit ist

$$\ker(\lambda - A) = \{u \in H : (u, e_n)_H = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus I\}.$$

Dieser Raum hat die Dimension $\text{card}(I)$.

b) Sei weiterhin $\lambda = \lambda_m$. Sei $f \in H$. Wir suchen Lösungen von

$$(P) \begin{cases} u \in D(A) \\ Au - \lambda u = f. \end{cases}$$

Ist u eine Lösung, so gilt

$$\begin{aligned} (f, e_n)_H &= (Au, e_n)_H - \lambda(u, e_n)_H \\ &= (\lambda_n - \lambda)(u, e_n)_H \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $(f, e_n)_H = 0$ für alle $n \in I$. Sei umgekehrt $f \in H$ mit $(f, e_n)_H = 0$ für alle $n \in I$. Setze $x_n := \frac{1}{\lambda_n - \lambda}(f, e_n)_H$ für $n \in \mathbb{N} \setminus I$ und wähle x_n beliebig für $n \in I$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin I}}^{\infty} \lambda_n^2 x_n^2 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin I}}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_n - \lambda)^2} (f, e_n)_H^2 \\ &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_H^2 \\ &= c \|f\|_H^2 \end{aligned}$$

mit $c = \sup_{n \notin I} \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_n - \lambda)^2}$.

Insbesondere ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Damit gibt es genau ein Element $u \in H$ mit $(u, e_n)_H = x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (u, e_n)_H^2 < \infty$, ist $u \in D(A)$. Es ist

$$\begin{aligned} Au - \lambda u &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda) x_n e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_H e_n = f. \end{aligned}$$

△

5 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 5

Aufgabe 5.1: *Beweisen Sie die Aussage von Beispiel 5.5^{AU}.*

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.1: Sei $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|$.
Sei

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ -1, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Sei $v \in C_c^1(-1,1)$. Dann gilt $v(-1) = v(1) = 0$ und somit

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 f(x) v'(x) dx &= - \int_{-1}^0 (-x) v'(x) dx - \int_0^1 x v'(x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 v(x) dx + x v(x) \Big|_{-1}^0 + \int_0^1 v(x) dx - x v(x) \Big|_0^1 \\ &= - \int_{-1}^0 v(x) dx + \int_0^1 v(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \text{sign}(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Dabei haben wir auf den Intervallen $(-1,0)$ und $(0,1)$ partiell integriert. \triangle

Aufgabe 5.2: *Bestimmen Sie die schwache Ableitung der Hutfunktion*

$$h(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.2: Sei $v \in C_c^1(0,2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} - \int_0^2 h(x) v'(x) dx &= - \int_0^1 x v'(x) dx - \int_1^2 (2-x) v'(x) dx \\ &= \int_0^1 v(x) dx - x v(x) \Big|_0^1 - \int_1^2 v(x) dx - (2-x) v(x) \Big|_1^2 \\ &= \int_0^1 v(x) dx - v(1) - \int_1^2 v(x) dx + v(1) \\ &= \int_0^1 v(x) g(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0,1] \\ -1 & \text{für } x \in (1,2). \end{cases}$$

Damit ist $h' = g$. △

Aufgabe 5.3: Sei $f \in L_1(a, b)$. Definieren Sie die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) := \int_a^x f(y) dy$. Zeigen Sie, dass g stetig ist.

Anleitung: Schreiben Sie $g(x) = \int_a^b \mathbb{1}_{(a,x)}(y) f(y) dy$. Sei $x_n \in [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Man zeige, dass $\mathbb{1}_{[a, x_n]}(y) f(y) \rightarrow \mathbb{1}_{[a, x]}(y) f(y)$, und wende den Satz von Lebesgue an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.3: Sei $f \in L_1(a, b)$,

$$g(x) := \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y) \mathbb{1}_{(a,x)}(y) dy,$$

$x \in [a, b]$. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x_n \in [a, b]$. Dann gilt für $f_n(y) := f(y) \mathbb{1}_{(a, x_n)}(y)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \begin{cases} f(y) & \text{wenn } y < x \\ 0 & \text{wenn } y > x. \end{cases}$$

Es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y) \mathbb{1}_{(a,x)}(y)$$

y -fast überall. Da $|f_n(y)| \leq |f(y)|$ für alle $y \in (a, b)$, folgt aus dem Satz von Lebesgue (Satz A.9^{AU}), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(y) dy = \int_a^b f(y) \mathbb{1}_{(a,x)}(y) dy = g(x).$$

△

Aufgabe 5.4: Seien $\lambda > 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(a, b)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $u \in H^2(a, b)$ gibt, so dass $\lambda u - u'' = f$ in (a, b) und $u'(a) = A$, $u'(b) = B$. Gehen Sie wie bei inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen im Anschluss an den Satz 5.17^{AU} vor.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.4: Wähle $w \in C^2[a, b]$ mit $w'(a) = A$, $w'(b) = B$. Nach Satz 5.18^{AU} gibt es genau eine Funktion $v \in H^2(a, b)$ mit $v'(a) = v'(b) = 0$, so dass

$$\lambda v - v'' = f - (\lambda w - w'').$$

Setze $u = v + w$. Dann ist $u \in H^2(a, b)$ mit $u'(a) = w'(a) = A$, $u'(b) = w'(b) = B$. Ferner ist $\lambda u - u'' = f$. Damit ist u eine Lösung des gestellten Problems. Ist u_1 eine zweite Lösung, so gilt für $u_2 := u - u_1 \in H^2(a, b)$, $\lambda u_2 - u_2'' = 0$, $u_2'(a) = u_2'(b) = 0$. Aus Satz 5.19^{AU} folgt, dass $u_2 \equiv 0$. △

Aufgabe 5.5:

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq 2 \left(u(0)^2 + \int_0^1 u'(x)^2 dx \right), \quad u \in H^1(0,1).$$

(b) Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $a(u, v) := \alpha u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$ eine koerzive Form auf $H^1(0,1)$ definiert.

(c) Sei $\alpha > 0$, $f \in L_2(0,1)$. Zeigen Sie, dass es genau ein $u \in H^2(0,1)$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & x \in (0,1), \\ -u'(0) + \alpha u(0) &= 0, & u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.5:

(a) Es ist $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(y) dy$. Damit ist nach der Young'schen (Lemma 5.22^{AU}) und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} u(x)^2 &= u(0)^2 + 2u(0) \int_0^x u'(y) dy + \left(\int_0^x u'(y) dy \right)^2 \\ &\leq u(0)^2 + u(0)^2 + \left(\int_0^x u'(y) dy \right)^2 + \left(\int_0^x u'(y) dy \right)^2 \\ &\leq 2 \left(u(0)^2 + \left(\int_0^x u'(y)^2 dy \right) \right). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq 2 \left(u(0)^2 + \int_0^1 u'(y)^2 dy \right).$$

(b) Aus a) folgt, dass mit $\beta = \min\{\frac{1}{2}, \alpha\}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(y)^2 dy + \alpha u(0)^2 &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 u'(y)^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^1 u'(y)^2 dy + \alpha u(0)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 u'(y)^2 dy + \beta \left(u(0)^2 + \int_0^1 u'(y)^2 dy \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 u'(y)^2 dy + \frac{\beta}{2} \int_0^1 u(y)^2 dy \\ &\geq \frac{\beta}{2} \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

(c) Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es genau ein $u \in H^1(0,1)$, so dass

$$\int_0^1 u'(y) v'(y) dy + \alpha u(0)v(0) = \int_0^1 v(y) f(y) dy \quad \text{für alle } v \in H^1(0,1).$$

Wählen wir $v \in C_c^1(0,1)$, so sehen wir, dass $u \in H^2(0,1)$ und $-u'' = f$.
Setzen wir das oben ein, so erhalten wir mit Hilfe von Satz 5.13^{AU}

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(y) v'(y) + \alpha u(0)v(0) &= - \int_0^1 v(y) u''(y) dy \\ &= -v(1)u'(1) + v(0)u'(0) + \int_0^1 v'(y) u'(y) dy, \end{aligned}$$

also

$$\alpha u(0)v(0) = -v(1)u'(1) + v(0)u'(0)$$

für alle $v \in H^1(0,1)$. Wählen wir $v(x) = x$, so sehen wir, dass $u'(1) = 0$.
Damit ist $\alpha u(0)v(0) = v(0)u'(0)$ für alle $v \in H^1(0,1)$. Wählen wir $v \equiv 1$,

so folgt, dass $\alpha u(0) = u'(0)$. Damit ist u eine Lösung. Ist umgekehrt u eine Lösung, so gilt für $v \in H^1(0,1)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(y) v(y) dy &= - \int_0^1 u''(y) v(y) dy \\ &= \int_0^1 u'(y) v'(y) dy - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) \\ &= a(u, v). \end{aligned}$$

Damit folgt die Eindeutigkeit aus dem Satz von Lax-Milgram.

△

Aufgabe 5.6: Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.23^{AU} erfüllt. Ferner gelte $r(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Sei $f \in L_2(a, b)$. Zeigen Sie, dass es genau ein $u \in H^2(a, b)$ gibt derart, dass

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu' + ru &= f \quad \text{fast überall auf } (a, b) \\ u'(a) &= u'(b) = 0. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.6: Betrachte die stetige Form a auf $H^1(a, b)$, die durch

$$a(u, v) = \int_a^b \{pu'v' + qu'v + ruv\} dx$$

gegeben ist. Um zu zeigen, dass a koerziv ist, wählen wir $\beta < \beta' < \alpha$. Dann gilt mit der Young'schen Ungleichung (Lemma 5.22^{AU})

$$\begin{aligned} a(u) &\geq \alpha \int_a^b u'^2 dx - \beta' \int_a^b u'^2 dx - \frac{1}{4\beta'} \int_a^b q^2 u^2 dx + \int_a^b ru^2 dx \\ &\geq (\alpha - \beta') \int_a^b u'^2 dx + \int_a^b \left(r - \frac{q^2}{4\beta'} \right) u^2 dx. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} r - \frac{q^2}{4\beta'} &= r - \frac{\beta}{\beta'} \frac{q^2}{4\beta} \\ &= \frac{\beta}{\beta'} \left(\frac{\beta'}{\beta} r - \frac{q^2}{4\beta} \right) = \frac{\beta}{\beta'} \left(\left(\frac{\beta'}{\beta} - 1 \right) r + r - \frac{q^2}{4\beta} \right) \\ &\geq \frac{\beta}{\beta'} \left(\frac{\beta'}{\beta} - 1 \right) r = \left(1 - \frac{\beta}{\beta'} \right) r \end{aligned}$$

nach Voraussetzung. Daher ist $a(u) \geq \gamma \|u\|_{H^1}^2$, $u \in H^1(a, b)$ mit $\gamma := \min\{\alpha - \beta', 1 - \frac{\beta}{\beta'}\} \cdot \delta$ wobei $\delta := \min_{x \in [a, b]} r(x)$. Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es ein eindeutiges $u \in H^1(a, b)$, so dass

$$a(u, v) = \int_a^b f v \, dx$$

für alle $v \in H^1(a, b)$. Insbesondere ist für $v \in C_c^1(a, b)$

$$\int_a^b (pu')v' \, dx = \int_a^b (f - qu' - ru)v \, dx.$$

Damit ist $pu' \in H^1$ und $-(pu')' = f - qu' - ru$. Aus Satz 5.13^{AU} folgt, dass $u' = \frac{1}{p}(pu') \in H^1(a, b)$. Damit ist $u \in H^2(a, b)$. Setzen wir nun $f = -(pu')' + qu' + ru$ in der oberen Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b \{pu'v' + qu'v + ruv\} \, dx &= \int_a^b (-(pu')' + qu' + ru)v \, dx \\ &= \int_a^b (pu'v' + qu'v + ruv) \, dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) \end{aligned}$$

für alle $v \in H^1(a, b)$, wobei wir im letzten Schritt partiell integriert haben. Somit ist

$$-p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) = 0$$

für alle $v \in H^1(a, b)$. Indem wir $v \in H^1(a, b)$ mit $v(b) = 1$, $v(a) = 0$ wählen, sehen wir, dass $u'(b) = 0$ ist. Wählen wir nun $v \equiv 1$, so erhalten wir $u'(a) = 0$. Wir haben gezeigt, dass u eine Lösung ist. Umgekehrt, ist u eine Lösung, so ist für $v \in H^1(a, b)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f v \, dx &= \int_a^b \{-(pu')'v + qu'v + ruv\} \, dx \\ &= \int_a^b pu'v' \, dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) + \int_a^b (qu'v + ruv) \, dx \\ &= a(u, v). \end{aligned}$$

Damit zeigt die Eindeutigkeit im Satz von Lax-Milgram auch die Eindeutigkeit der Lösung. Ist schließlich $f \in C[a, b]$, so ist $-(pu')' = f - qu' - ru$ stetig. Also ist $pu' \in C^1[a, b]$ und damit $u' \in C^1[a, b]$. Folglich ist $u \in C^2[a, b]$. \triangle

Aufgabe 5.7: Sei $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f \in H^2(a, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass $f'' = 0$ genau dann gilt, wenn es $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1x$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - y)f''(y) dy$ fast überall.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.7: Sei $f \in H^2(a, b)$.

a) Sei $f'' = 0$. Dann folgt aus Lemma 5.7^{AU}, dass es $c_1 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f'(x) = c_1$ fast überall. Definiere $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - c_1x$. Dann ist $g \in H^1(a, b)$ und $g' = 0$. Damit gibt es $c_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $g(x) = c_0$ für alle $x \in [a, b]$. Damit ist

$$f(x) - c_1x = c_0, \quad x \in [a, b].$$

b) Sei $f \in H^2(a, b)$. Definiere $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \int_a^x (x - y)f''(y) dy = x \int_a^x f''(y) dy - \int_a^x yf''(y) dy.$$

Dann folgt aus dem Hauptsatz 5.9^{AU} und der Produktregel, Satz 5.13^{AU}, dass $g \in H^1(a, b)$ und $g'(x) = \int_a^x f''(y) dy$. Somit ist $g \in H^2(a, b)$ und $g'' = f''$. Sei $h = f - g$. Dann ist $h \in H^2(a, b)$ und $h'' = 0$. Somit folgt aus a), dass $h(x) = c_0 + c_1(x - a)$, $x \in (a, b)$ mit geeigneten Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$f(x) = g(x) + h(x) = c_0 + c_1(x - a) + \int_a^x (x - y)f''(y) dy.$$

Nun sieht man, dass $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$.

△

Aufgabe 5.8: (allgemeine schwache Ableitungen.) Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Wir betrachten den Vektorraum

$$L_{1,loc}(a, b) := \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar: } \int_c^d |f(x)| dx < \infty \text{ wenn } a < c < d < b \right\}$$

der lokal integrierbaren Funktionen auf (a, b) .

(a) Sei $f \in L_{1,loc}(a, b)$, so dass $\int_a^b fv dx = 0$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ fast überall. Benutzen Sie Lemma 5.1^{AU}.

(b) Wir sagen, dass $f \in L_{1,\text{loc}}(a, b)$ schwach differenzierbar ist, falls es eine Funktion $f' \in L_{1,\text{loc}}(a, b)$ gibt, so dass

$$-\int_a^b f(x) v'(x) dx = \int_a^b f'(x) v(x) dx$$

für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Zeigen Sie, dass es höchstens ein solches f' gibt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$W_{1,\text{loc}}^1(a, b) := \{f \in L_{1,\text{loc}}(a, b) : f \text{ ist schwach differenzierbar}\}$$

ein Vektorraum ist und dass $f \mapsto f' : W_{1,\text{loc}}^1(a, b) \rightarrow L_{1,\text{loc}}(a, b)$ linear ist.

(d) Sei $f \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$, so dass $f' = 0$ fast überall. Zeigen Sie, dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = c$ fast überall. Modifizieren Sie den Beweis von Lemma 5.7^{AU}.

(e) Sei $f \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = c + \int_{x_0}^x f'(y) dy$ fast überall. Anleitung: Gehen Sie analog zum Beweis von Satz 5.9^{AU} vor.

(f) Seien $f \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$, $c_1 \in \mathbb{R}$, so dass $f'(x) = c_1$ fast überall. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = c_1 x + c_0$ fast überall.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.8:

(a) Sei $f \in L_{1,\text{loc}}(a, b)$, so dass $\int_a^b f v dx = 0$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Betrachte ein beschränktes Intervall $[c, d] \subset (a, b)$. Wir zeigen, dass $f = 0$ fast überall auf $[c, d]$.

Sei $g(x) = \text{sign } f(x) := \mathbb{1}_{\{f>0\}} - \mathbb{1}_{\{f<0\}}$, $x \in (c, d)$. Dann ist $g \in L_2(c, d)$. Somit gibt es nach Lemma 5.1^{AU} $g_n \in C_c^1(c, d)$, so dass $g_n \rightarrow g$ in $L_2(c, d)$. Wir können annehmen, dass $g_n(x) \rightarrow g(x)$ fast überall, sonst gehen wir zu einer Teilfolge über (Satz A.12^{AU}). Indem wir $g_n(x)$ durch $\max\{\min\{g_n(x), 1\}, -1\}$ ersetzen, können wir annehmen, dass $|g_n(x)| \leq 1$. Nun folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$\int_c^d |f(x)| dx = \int_c^d \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f(x) g_n(x) dx = 0.$$

Also ist $f(x) = 0$ für fast alle $x \in (c, d)$.

(b) Ist $g \in L_{1,\text{loc}}(a, b)$ eine zweite Funktion mit $-\int_a^b f v' dx = \int_a^b g v dx$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$, so ist $\int_a^b g v dx = \int_a^b f' v dx$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Also ist $\int_a^b (g - f') v dx = 0$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Damit ist $g - f' = 0$ fast überall nach (a).

(c) Sind $f_1, f_2 \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt für $v \in C_c^1(a, b)$

$$\begin{aligned} - \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) v' dx &= -\alpha \int_a^b f_1 v' dx - \beta \int_a^b f_2 v' dx \\ &= \alpha \int_a^b f_1' v dx + \beta \int_a^b f_2' v dx \\ &= \int_a^b (\alpha f_1' + \beta f_2') v dx. \end{aligned}$$

Damit ist $(\alpha f_1 + \beta f_2)' = \alpha f_1' + \beta f_2'$.

(d) Sei $\eta \in C_c^1(a, b)$ mit $\int_a^b \eta(x) dx = 1$ fest gewählt. Sei $v \in C_c^1(a, b)$. Dann ist $w := v - \int_a^b v dx \cdot \eta \in C_c^1(a, b)$ und $\int_a^b w dx = 0$. Definiere $\psi(x) = \int_a^x w(y) dy$. Dann ist $\psi \in C_c^1(a, b)$ und $\psi' = w$. Nach Voraussetzung ist $\int_a^b f \psi' dx = 0$. Also gilt

$$\int_a^b v f dx = \int_a^b v(x) dx \int_a^b f(y) \eta(y) dy.$$

Damit ist $\int_a^b v(f - c) dx = 0$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$ mit $c = \int_a^b f(y) \eta(y) dy$. Aus (a) folgt, dass $f(x) = c$ fast überall.

(e) Sei $f \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$. Definiere $g(x) = \int_{x_0}^x f(y) dy$. Man zeigt, wie in Satz 5.9^{AU}, dass $f - g$ konstant ist.

(f) Sei $f \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$, $c_1 \in \mathbb{R}$, so dass $f'(x) = c_1$ fast überall. Dann definiert $g(x) = f(x) - c_1 x$ eine Funktion $g \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$ mit $g' = 0$. Damit gibt es nach d) c_0 , so dass $g(x) = c_0$ fast überall. Also ist $f(x) = c_0 + c_1 x$ fast überall.

△

Aufgabe 5.9: (harmonische Funktionen.) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und sei $f \in L_2(a, b)$ derart, dass

$$\int_a^b f(x) v''(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v \in C_c^2(a, b).$$

Zeigen Sie, dass $f(x) = c_0 + c_1 x$ fast überall, wobei $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Hier ist $C_c^k(a, b) := \{v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : k\text{-mal stetig differenzierbar}, \exists a < c < d < b, \text{ so dass } v(x) = 0, \text{ falls } x \notin [c, d], k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$. Man lasse sich vom Beweis von Lemma 5.7^{AU} inspirieren und benutze Aufgabe 5.7^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.9: Sei $f \in L_2(a, b)$, so dass $\int_a^b f v'' dx = 0$ für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Wähle $\eta \in C_c^1(a, b)$ fest, derart, dass $\int_a^b \eta(x) dx = 1$.

Sei $w \in C_c^1(a, b)$ beliebig. Betrachte $\psi := w - \int_a^b w(x) dx \cdot \eta$. Dann ist $\psi \in C_c^1(a, b)$ und $\int_a^b \psi(x) dx = 0$. Definiere $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $v(x) = \int_a^x \psi(y) dy$. Dann ist $v \in C_c^1(a, b)$ und $v' = \psi$ (vgl. den Beweis von Lemma 5.7^{AU}). Damit ist $v'' = w' - \int_a^b w(x) dx \cdot \eta'$. Nach Voraussetzung ist

$$0 = \int_a^b f v'' dx = \int_a^b w' f dx - \int_a^b w(x) dx \int_a^b \eta' f dx.$$

Setze $c := - \int_a^b \eta' f dx$. Damit ist

$$- \int_a^b w' f dx = \int_a^b c w(x) dx$$

für alle $w \in C_c^1(a, b)$. Damit ist $f \in H^1(a, b)$ und $f' = c$. Nun folgt die Behauptung aus Aufgabe 5.7^{AU}.

Bemerkung Man kann mit Hilfe von Aufgabe 5.8^{AU} noch eine allgemeinere Aussage erzielen: Sei $f \in L_{1,\text{loc}}(a, b)$, so dass $\int_a^b f v'' dx = 0$ für alle $v \in C_c^2(a, b)$. Wir zeigen, dass f affin ist. Wähle $\psi \in C_c^2(a, b)$, so dass $\int_a^b \psi dx = 1$. Sei $v \in C_c^1(a, b)$ beliebig. Dann ist $g = v - (\int_a^b v dx) \psi \in C_c^1(a, b)$ und $\int_a^b g(x) dx = 0$. Damit definiert $G(x) = \int_a^x g(y) dy$ eine Funktion $G \in C_c^2(a, b)$. Nach Voraussetzung ist für $c_1 = \int_a^b \psi' f dx$

$$0 = \int_a^b f G'' = \int_a^b f v' - c_1 \int_a^b v dx.$$

Es ist also

$$- \int_a^b f v' dx = - \int_a^b c_1 \cdot v dx$$

für alle $v \in C_c^1(a, b)$. Damit ist $f \in W_{1,\text{loc}}^1(a, b)$ und $f' = -c_1$. Nun folgt aus Aufgabe 5.8^{AU} (f), dass es $c_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = -c_1 x + c_0$ fast überall. \triangle

Aufgabe 5.10: Seien $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(0, T)$, wobei $0 < T < \infty$. Sei $u(t) = e^{-\lambda t} u_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds$. Zeigen Sie: u ist die eindeutige Lösung des Problems

$$u \in H^1(0, T), \quad u'(t) = -\lambda u(t) + f(t), \quad u(0) = u_0. \quad (5.1)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.10: a) **Eindeutigkeit:** Sind u_1, u_2 zwei Lösungen, so ist $u := u_1 - u_2 \in H^1(0, T)$, $u(0) = 0$ und $u' = -\lambda u$.

Setze $w(t) = e^{\lambda t} u(t)$. Dann ist nach der Produktregel, Satz 5.13^{AU}, $w \in H^1(0, T)$ und $w'(t) = \lambda e^{\lambda t} u(t) + e^{\lambda t} u'(t) = \lambda e^{\lambda t} u(t) + e^{\lambda t} (-\lambda u(t)) = 0$. Aus Lemma 5.7^{AU} folgt, dass w konstant ist. Da $w(0) = 0$, folgt, dass $w \equiv 0$. Damit ist auch $u \equiv 0$, und die zwei Lösungen sind identisch.

Existenz: Sei $u(t) = e^{-\lambda t} u_0 + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds$. Aus Satz 5.9^{AU} a) folgt, dass $w(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds$ eine Funktion $w \in H^1(0, T)$ definiert und dass $w'(t) = e^{-\lambda t} f(t)$ fast überall. Die Produktregel, Satz 5.13^{AU}, impliziert, dass $u \in H^1(0, T)$ und $u'(t) = -\lambda u(t) + f(t)$ fast überall. \triangle

Aufgabe 5.11:

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Inklusion $H^{k+1}(a, b) \subset C^k[a, b]$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ gilt, wobei $C^0[a, b] := C[a, b]$.

b) Zeigen Sie, dass $C^k[a, b]$ ein Banach-Raum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{m=0}^k \|f^{(m)}\|_{C[a, b]}$$

ist, wobei $f^{(0)} = f$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, dass $H^{k+1}(a, b) \hookrightarrow C^k[a, b]$, also die Stetigkeit der Einbettung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.11:

a) Es ist nach Korollar 5.10^{AU}

$$H^1(a, b) \subset C[a, b],$$

d.h. die Aussage ist richtig für $k = 0$. Sei sie nun richtig für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$; d.h. es sei $H^{k+1}(a, b) \subset C^k[a, b]$. Sei $u \in H^{k+2}(a, b)$; d.h. es ist $u' \in H^{k+1}(a, b) \subset C^k[a, b]$. Da $u(x) = u(a) + \int_a^x u'(y) dy$, folgt, dass $u \in C^1[a, b]$ und $u' \in C^k[a, b]$. Damit ist $u \in C^{k+1}[a, b]$. Die Aussage ist also für $k + 1$ richtig.

b) Wir beweisen die Aussage durch Induktion. $C^0[a, b]$ ist ein Banach-Raum bzgl. der Supremumsnorm. Damit ist die Aussage für $k = 0$ richtig. Sei sie nun für ein $k \in \mathbb{N}$ richtig. Wir wollen zeigen, dass $C^{k+1}[a, b]$ vollständig ist. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^{k+1}[a, b]$. Da

$$\|g^{(m)}\|_{C[a, b]} \leq \|g\|_{C^{k+1}[a, b]}$$

für $m = 0, 1, \dots, k+1$, ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^k[a, b]$ und $(f_n^{(k+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C[a, b]$. Sei $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ in $C^k[a, b]$ und $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k+1)}$ in $C[a, b]$. Da

$$f_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(a) + \int_a^x f_n^{(k+1)}(y) dy$$

folgt mit $n \rightarrow \infty$, dass

$$f^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) + \int_a^x g(y) dy.$$

Damit ist $f^{(k)} \in C^{k+1}[a, b]$ und $f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = g$. Da $f_n^{(k+1)} \rightarrow g = f^{(k+1)}$ in $C[a, b]$, folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $C^{k+1}[a, b]$.

- c) Sei $f_n \rightarrow f$ in $H^{k+1}(a, b)$ und $f_n \rightarrow g$ in $C^k[a, b]$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$, die fast überall gegen f konvergiert (Satz A.10^{AU}). Damit ist $f = g$ fast überall. Da f stetig ist (Korollar 5.10^{AU}), ist $f = g$. Die Einbettung hat also einen abgeschlossenen Graphen. Somit ist sie stetig.

△

Aufgabe 5.12: (absolute Konvergenz von Fourier-Reihen.)

- a) Sei $f = u + iv$ mit $u, v \in H^1(0, 2\pi)$, so dass $f(0) = f(2\pi)$. Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe von f absolut gegen f konvergiert.

Anleitung: Es ist $c'_k = ikc_k$, wobei c'_k der k -te Fourier-Koeffizient von $f' := u' + iv'$ und c_k der k -te Fourier-Koeffizient von f ist (entsprechend (3.17^{AU})).

- b) Schließen Sie aus a) den Satz von Dirichlet: Ist $f \in C_{2\pi}$ stückweise stetig differenzierbar (d.h. es gibt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$ und $g_i \in C^1[t_{i-1}, t_i]$, so dass $f = g_i$ auf (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, \dots, n$), so konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f .

Anleitung: Benutzen Sie Satz 5.14^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.12:

- a) Es ist

$$c'_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f'(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-ikt})' f(t) dt = -ikc_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hier haben wir die Regel des partiellen Integrierens auf komplex-wertige Funktionen erweitert, was mit identischen Beweisen geschieht, wie sie in

Kapitel 5 benutzt werden. Alternativ kann man $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$, $f = u + iv$ schreiben und die partielle Integration für reellwertige Funktionen benutzen (wir überlassen das dem Leser). Da die Funktionen $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aus Beispiel 4.14^{AU} eine Orthonormalbasis von $L_2(0, 2\pi; \mathbb{C})$ bilden und $c'_k = (f', c_k)$, folgt, dass $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c'_k|^2 < \infty$. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung zeigt nun, dass

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} |c_k| &= \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|} |c_k| \\ &\leq \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k \neq 0} |c_k|^2 \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$. Sie konvergiert gegen $f(t)$, da sie nach Satz 3.11^{AU} im Abel'schen Sinn gegen $f(t)$ konvergiert. Dazu beachte man, dass nach dem Abel'schen Grenzwertsatz 3.12^{AU} aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ gegen eine Zahl c , die Abel'sche Konvergenz $\lim_{r \uparrow 1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} c_k e^{ikt} = c$ folgt. Damit ist $f(t) = c$.

b) Nach Satz 5.14^{AU} ist $f \in H^1(0, 2\pi)$ und $f' = g'_i$ auf (t_{i-1}, t_i) . Damit ist

$$\begin{aligned} c'_k &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'_i(t) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_i(t) (e^{-ikt})' dt \\ &= -ik \sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= -ik c_k \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Nun geht der Beweis weiter wie in a). △

Aufgabe 5.13: (schwache Lösungen der Wellengleichung.) Betrachten Sie die Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t, x \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

auf \mathbb{R}^2 , wobei $u = u(t, x)$.

a) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung von (5.2). Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) (\varphi_{tt}(t, x) - \varphi_{xx}(t, x)) dt dx = 0 \quad (5.3)$$

für alle $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

- b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definieren Sie $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$. Somit ist u stetig. Zeigen Sie, dass u eine schwache Lösung von (5.2) ist; d.h., es gilt (5.3) für alle $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.13:

- a) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $u_{tt} = u_{xx}$. Sei $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Durch partielles Integrieren und Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) (\varphi_{tt}(t, x) - \varphi_{xx}(t, x)) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \varphi_{tt}(t, x) dt dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \varphi_{xx}(t, x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{tt}(t, x) \varphi(t, x) dt dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{tt}(t, x) \varphi(t, x) dt dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}(t, x) \varphi(t, x) dt dx = 0. \end{aligned}$$

- b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$. Sei $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Sei $\varphi(t, x) = 0$ für $|t| \leq R, |x| \leq R$. Es gibt Funktion $f \in C^2(K)$, $K := \{(t, x) : |t| \leq 2R+1, |x| \leq 2R+1\}$, so dass $f_n(t, x)$ gleichmäßig auf K gegen $f(t, x)$ konvergiert. Das folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß (Satz A.5^{AU}). Sei $u_n(t, x) = \frac{1}{2}(f_n(x+t) + f_n(x-t))$. Dann konvergiert $u_n(t, x)$ gleichmäßig auf K gegen $u(t, x)$. Ferner ist $u_{ntt} = u_{nxx}$. Deswegen folgt aus a), dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) (\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) dt dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_n(t, x) (\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) dt dx = 0. \end{aligned}$$

△

Aufgabe 5.14: Definieren Sie $H^1(\mathbb{R})$ ähnlich wie auf beschränkten Intervallen. Zeigen Sie, dass $H^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}) := \{u \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.14:

1. **Vorschlag:** Sei $f \in H^1(\mathbb{R})$. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Gegebenenfalls nach Spiegelung dürfen wir also $\beta := \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$ annehmen. Zudem ist $\alpha := \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq 0$, denn anderenfalls gäbe es ein x_0 mit $f(x) \geq \frac{\alpha}{2}$ für $x \geq x_0$, was

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 \geq \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha^2}{4} = \infty$$

im Widerspruch zu $f \in L^2(\mathbb{R})$ implizieren würde. Wähle nun α' und β' mit $0 < \alpha' < \beta' < \beta$. Wegen $\alpha < \alpha'$, nach Definition von α und β und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es Folgen (x_n) und (y_n) mit

$$x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_{n-1} < x_n < y_n < x_{n+1} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

$f(x_n) = \alpha'$, $f(y_n) = \beta'$ und $f(t) \geq \alpha'$ für $t \in [x_n, y_n]$. Wegen

$$(\alpha')^2 \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{y_n} f^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 < \infty$$

ist $(y_n - x_n)_n$ eine Folge in ℓ^1 und somit insbesondere beschränkt. Sei also $M > 0$ so gewählt, dass $|y_n - x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aus der Darstellung von H^1 -Funktionen als unbestimmtes Integral ihrer Ableitung ergibt sich mittels der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung somit

$$\begin{aligned} \beta' - \alpha' &= f(y_n) - f(x_n) = \int_{x_n}^{y_n} f' \leq \int_{x_n}^{y_n} |f'| \\ &\leq \left(\int_{x_n}^{y_n} |f'|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{x_n}^{y_n} 1^2 \right)^{1/2} \leq M^{1/2} \left(\int_{x_n}^{y_n} |f'|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

woraus

$$\int_{\mathbb{R}} |f'|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{y_n} |f'|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta' - \alpha')^2}{M} = \infty$$

im Widerspruch zu $f' \in L^2(\mathbb{R})$ folgt.

Bemerkung: Setzt man zudem $f' \in L^1(\mathbb{R})$ voraus, hat man bei der Wahl der (x_n) und (y_n) mehr Freiheiten, kann auf die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung verzichten und muss nicht zeigen, dass $(y_n - x_n)_n$ beschränkt ist.

Konsequenz: Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt aus dieser Aufgabe, dass es eine Konstante $c > 0$ mit $|f(x)| \leq c \|f\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $f \in H^1(\mathbb{R})$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gibt. Wüsste man dies bereits aus anderen Gründen, was wiederum mit der Situation $f' \in L^1(\mathbb{R})$ zu tun hat, könnte man für diese Aufgabe auch anders argumentieren: Man approximiert f in $H^1(\mathbb{R})$ durch eine Folge f_n von Funktionen mit kompaktem Träger. Da diese in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ liegt und nach obiger Abschätzung in der Norm von $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ konvergiert, folgt $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. **Vorschlag:** Sei $G(s) = |s| \cdot s$, $s \in \mathbb{R}$. Dann ist $G \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$G'(s) = 2|s|.$$

Sei $v \in C_c^1(\mathbb{R})$. Dann ist $u := G \circ v \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $u'(s) = 2|v(s)| \cdot v'(s)$.

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 = |u(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t 2|v(s)|v'(s) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} v(s)^2 ds + \int_{-\infty}^{+\infty} v'(s)^2 ds \\ &= \|v\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \tag{5.4}$$

für alle $v \in C_c^1(\mathbb{R})$. Nach Satz 6.25^{AU} ist $C_c^1(\mathbb{R})$ dicht in $H^1(\mathbb{R})$. Sei $u \in H^1(\mathbb{R})$. Dann gibt es $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$, so dass $\lim u_n = u$ in $H^1(\mathbb{R})$. Aus (5.4) folgt, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. (5.4) eine Cauchy-Folge ist. Da $C_0(\mathbb{R})$ vollständig ist, folgt, dass $u \in C_0(\mathbb{R})$ und $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{H^1}$.

Bemerkung: Später werden wir über die Fourier-Transformation eine dritte Methode zu Lösung der Aufgabe sehen, siehe Satz 6.50^{AU}.

△

6 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 6

Aufgabe 6.1: (Träger von messbaren Funktionen.) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Setze $O_f := \{x \in \Omega : \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } f(x) = 0 \text{ fast überall auf } B(x, \varepsilon)\}$. Die Menge $\text{supp } f := \Omega \setminus O_f$ heißt der Träger von f .

- a) Zeigen Sie: O_f ist die größte offene Menge U in Ω , auf der f fast überall verschwindet.
- b) Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Sei $O_f := \{x \in \Omega : \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } f(y) = 0 \text{ fast überall auf } B(x, \varepsilon)\}$.

- a) O_f ist nach Definition offen. Sei $x \in O_f$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $B(x, \varepsilon) \subset O_f$ und $f(y) = 0$ fast überall auf $B(x, \varepsilon)$. Es gibt $z \in B(x, \varepsilon)$ mit rationalen Koordinaten und $0 < \delta < \varepsilon$ rational, so dass $x \in B(z, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$. Das zeigt, dass O_f eine abzählbare Vereinigung von Kugeln ist, auf denen f fast überall verschwindet. Damit ist f auf O_f fast überall Null. Ist O eine offene Teilmenge von Ω auf der f fast überall Null ist, so gilt $O \subset O_f$. Denn zu $x \in O$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset O$. Damit verschwindet f fast überall auf $B(x, \varepsilon)$. Somit ist $x \in O_f$. Wir haben gezeigt, dass O_f die größte offene Teilmenge von Ω ist, auf der f fast überall verschwindet.
- b) Die Menge $\text{supp } f := \Omega \setminus O_f$ ist relativ abgeschlossen in Ω , d.h. sind $x_n \in \text{supp } f$ und ist $x \in \Omega$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, dann ist auch $x \in \text{supp } f$. Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Wir erinnern daran, dass $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (Satz 6.4^{AU}). Sei $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$. Dann ist

$$f * g(x) = \int_{\text{supp } g} f(x-y)g(y)dy = 0.$$

Denn für alle $y \in \text{supp } g$ ist $x-y \in O_f$. Aber es gibt eine Nullmenge $N \subset O_f$, so dass $f(z) = 0$ für alle $z \in O_f \setminus N$. Damit ist $f(x-y)g(y)$ Null fast überall auf $\text{supp } g$. Damit ist $f * g = 0$ für $x \in \Omega \setminus (\text{supp } f + \text{supp } g)^-$. Also ist $\Omega \setminus (\text{supp } f + \text{supp } g)^- \subset O_{f * g}$. Folglich ist $\text{supp}(f * g) = \Omega \setminus (O_{f * g}) \subset (\text{supp } f + \text{supp } g)^-$.

△

Aufgabe 6.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $j \in \{1, \dots, d\}$. Zeigen Sie, dass $-\int_{\Omega} u D_j v \, dx = \int_{\Omega} D_j u v \, dx$ für alle $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.2: Sei $u \in H^1(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, d\}$. Sei $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann gibt es $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = v$ in $H^1(\Omega)$. Es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = v, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_j \varphi_n = D_j v$$

in $L_2(\Omega)$. Damit ist

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u D_j v \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\int_{\Omega} u D_j \varphi_n \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D_j u \varphi_n \, dx \\ &= \int_{\Omega} D_j u v \, dx. \end{aligned}$$

Bei der 2. Identität haben wir die Definition von $D_j u$ benutzt. △

Aufgabe 6.3: Sei $u \in H^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeigen Sie, dass $D_i D_j u = D_j D_i u$ für $i, j = 1, \dots, d$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.3: Sei $u \in H^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann sind $D_i D_j u$ und $D_j D_i u$ in $L_2(\Omega)$. Sei $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt nach Definition der schwachen Ableitungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_i D_j u) v \, dx &= \int_{\Omega} D_j u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \\ &= \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} \, dx \\ &= \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \, dx \\ &= \int_{\Omega} D_j (D_i u) v \, dx, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}$$

(Satz von Schwarz). Da $\mathcal{D}(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ dicht liegt, folgt, dass $D_i D_j u = D_j D_i u$. △

Aufgabe 6.4: Sei $\Omega = \mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $d \geq 3$, $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ derart, dass $\int_{0 < |x| < 1} |u(x)|^2 dx < \infty$ und $\int_{0 < |x| < 1} |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega)$ und $(D_j u)(x) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ für $x \neq 0$.

Anleitung: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass es $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{0\})$ gibt, so dass $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $H^1(\Omega)$. Wählen Sie $\varphi_n(x) := f(n|x|)\varphi(x)$ wie in Bemerkung 6.31^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.4: Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $d \geq 3$ und sei $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$, so dass $\int_{0 < |x| < 1} |u|^2 dx < \infty$ und $\int_{0 < |x| < 1} |\nabla u|^2 dx < \infty$. Sei

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und

$$g_j(x) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann sind $\tilde{u}, g_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$.

Wir zeigen, dass $D_j \tilde{u} = g_j$ im schwachen Sinn (siehe (6.21^{AU})). Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Bemerkung 6.31^{AU} zeigt, dass es $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{0\})$ gibt, so dass $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $H^1(\Omega)$; d.h. $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $L_2(\Omega)$ und $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ in $L_2(\Omega)$ mit $n \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, d$. Damit ist für $j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \tilde{u} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega \setminus \{0\}} u \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \{0\}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi_n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_j \varphi_n dx \\ &= \int_{\Omega} g_j \varphi dx. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. △

Aufgabe 6.5:

a) Sei $\Omega = \mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $u(x) = |x|^{2\alpha}$. Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion u in $H^1(\Omega)$ liegt.

b) Sei $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $H^1(\Omega)$ eine unstetige Funktion enthält.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.5:

- a) Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $u(x) = |x|^{2\alpha}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es ist nach Satz A.12^{AU}:

$$\int_{\Omega} u(x)^2 dx = \sigma(S^{d-1}) \int_0^1 r^{4\alpha} r^{d-1} dr.$$

Damit ist $u \in L_2(\Omega)$ genau dann, wenn $4\alpha + d > 0$, d.h. $\alpha > -\frac{d}{4}$. Es ist $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 2\alpha |x|^{2\alpha-1} \frac{x_j}{|x|}$. Damit ist

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx \leq 4\alpha^2 \sigma(S^{d-1}) \int_0^1 r^{4\alpha-2} r^{d-1} dr < \infty,$$

falls $4\alpha - 2 + d > 0$; d.h. falls $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{d}{4}$. Aus Aufgabe 6.4^{AU} folgt, dass $u \in H^1(\Omega)$ wenn $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{d}{4}$.

- b) Wir können annehmen, dass $0 \in \Omega$ (sonst verschieben wir Ω). Sei $d \geq 3$. Dann können wir $\frac{1}{2} - \frac{d}{4} < \alpha < 0$ wählen. Nach a) definiert

$$u(x) := \begin{cases} |x|^{2\alpha} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$. Die Funktion ist in 0 unstetig.

△

Aufgabe 6.6:

- a) Sei $\Omega = \mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ und sei $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ derart, dass $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$. Sei $u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{1/4} \cdot \eta(x)$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega)$.
- b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $H^1(\Omega)$ unstetige Funktionen enthält.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.6:

- a) Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Sei $w(x) := \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{1/4}$. Wir zeigen, dass

$w \in H^1(\Omega)$. Es ist nach Satz A.12^{AU}:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(x)^2 dx &= 2\pi \int_0^1 \left(\log \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} r dr \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} (\log s)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s^3} ds \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-3t} e^t dt \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-2t} dt < \infty, \end{aligned}$$

wobei wir $\log s = t$ substituiert haben. Damit ist $u \in L_2(\Omega)$. Es ist $\frac{\partial w}{\partial x_j} = \frac{1}{4} (\log \frac{1}{|x|})^{-3/4} |x| \frac{x_j}{|x|}$. Damit ist

$$\begin{aligned} 16 \cdot \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right|^2 dx &\leq 2\pi \int_0^1 \left(\log \frac{1}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} r^2 r dr \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} (\log s)^{-\frac{3}{2}} s^{-5} ds \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} t^{-3/2} e^{-5t} e^t dt < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $w \in H^1(\Omega)$ nach Aufgabe 6.4^{AU}.

Es folgt aus der Produktregel, dass $u = \eta w \in H^1(\Omega)$.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass $u \in H_0^1(\Omega)$. Der Nullpunkt wird von $H^1(\Omega)$ in Dimension $d \geq 2$ ignoriert.

b) Das folgt aus a) durch Verschieben und Skalieren.

△

Aufgabe 6.7: Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $H^2(\mathbb{R}^d)$ ist. Anleitung: Beweis von Satz 6.25^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.7: Sei $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist nach Satz 6.5^{AU} $\rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $D_j(\rho_n * u)(x) = (\frac{\partial \rho_n}{\partial x_j} * u)(x)$. Ist nun $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, so folgt

aus der Definition der schwachen Ableitung, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial x_j} * u \right) (x) &= \int \frac{\partial \rho_n}{\partial x_j} (x-y) u(y) dx \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial y_j} \rho_n (x-y) u(y) dy \\ &= \int \rho_n (x-y) D_j u(y) dy \\ &= (\rho_n * D_j u)(x), \end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass $\rho_n(x - \cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Insgesamt ist also

$$D_j(\rho_n * u) = \rho_n * D_j u$$

für $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Ist $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$, so folgt

$$D_j D_i(\rho_n * u) = \rho_n * D_i D_j u.$$

Aus Satz 6.6^{AU} folgt, dass $u_n := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^2(\mathbb{R}^d)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ in $H^2(\mathbb{R}^d)$. Sei nun $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}^d$) und $\eta(x) = 1$ für $|x| = 1$. Sei $\eta_n(x) = \eta(\frac{x}{n})$. Somit ist $\eta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \eta_n(x) \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}^d$) und $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Daher ist

$$\psi_n := \eta_n \cdot u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

und aus dem Satz von Lebesgue folgt, dass

$$\psi_n = \eta_n \cdot (u_n - u) + \eta_n u \rightarrow u$$

($n \rightarrow \infty$) in $L_2(\mathbb{R}^d)$. Ferner ist

$$(D_j \psi_n)(x) = \frac{1}{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \left(\frac{x}{n} \right) u_n + \eta_n \rho_n * D_j u.$$

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} D_j u_n = D_j u$ in $L_2(\mathbb{R}^2)$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} D_i D_j \psi_n(x) &= \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{x}{n} \right) u_n + \\ &2 \frac{1}{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \left(\frac{x}{n} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \eta_n (\rho_n * D_i D_j u), \end{aligned}$$

und somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} D_i D_j u_n = D_i D_j u$ in $L_2(\mathbb{R}^d)$. Wir haben gezeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = u$ bzgl. der Norm von $H^2(\mathbb{R}^d)$. \triangle

Aufgabe 6.8: Sei $\Omega = (0,1) \cup (1,2)$. Zeigen Sie, dass $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ nicht dicht in $H^1(\Omega)$. Hinweis: $\mathbb{1}_{(0,1)} \in H^1(\Omega)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.8: Sei $\Omega = (0,1) \cup (1,2)$, $u = \mathbb{1}_{(0,1)}$. Dann ist $u \in H^1(\Omega)$ und $u' = 0$. Denn sei $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Dann verschwindet φ in einer Umgebung von 1. Somit ist

$$- \int_0^2 u \varphi' dx = \int_0^1 \varphi' dx = -\varphi(1) + \varphi(0) = 0.$$

Damit ist $u' = 0$. Es ist also insbesondere $u \in H^1(\Omega)$. Angenommen, es gäbe $u_n \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ in $H^1(\Omega)$. Nach Korollar 5.10^{AU} gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} \sup_{0 < x < 1} |v(x)| &\leq c \|v\|_{H^1(0,1)}, \quad v \in H^1(0,1), \\ \sup_{1 < x < 2} |v(x)| &\leq c \|v\|_{H^1(1,2)}, \quad v \in H^1(1,2). \end{aligned}$$

Damit konvergierte u_n auf Ω gleichmäßig gegen u . Folglich wäre u auf $(0,1) \cup (1,2)$ stetig. Aber es ist $\lim_{x \uparrow 1} u(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \downarrow 1} u(x)$. Das ist ein Widerspruch. \triangle

Aufgabe 6.9: (Variante der Produktregel.) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeigen Sie, dass für u und v in $H^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ auch das Produkt uv in $H^1(\Omega)$ liegt und $D_j(uv) = D_j u v + u D_j v$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.9: Seien $u, v \in H^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Dann ist $u \cdot v \in L_2(\Omega)$. Sei $j \in \{1, \dots, d\}$. Dann liegt $g_j := (D_j u)v + u D_j v$ in $L_2(\Omega)$. Wir zeigen, dass $g_j = D_j(uv)$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nach Satz 6.16^{AU} gibt es $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, so dass $u_n \rightarrow u$ in $L_2(\Omega)$ und $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \rightarrow D_j u$ in $L_2(U)$ wobei $\text{supp } \varphi \subset U \Subset \Omega$. Es ist $\varphi u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ und

$$\frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u_n + \varphi \frac{\partial u_n}{\partial x_j}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} v u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ - \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_j} (u_n \varphi) dx + \int_{\Omega} v \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} (D_j v) u_n \varphi dx + \int_{\Omega} v \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \right\} \\ &= \int_{\Omega} ((D_j v) u \varphi + v D_j u \varphi) dx \\ &= \int_{\Omega} g_j \varphi dx. \end{aligned}$$

Damit ist g_j die j -te schwache Ableitung von $u \cdot v$. \triangle

Aufgabe 6.10: (Variante der Kettenregel.) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\varphi(u) := f \circ u$ eine Abbildung $\varphi : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ definiert und $D_j \varphi(u) = (f' \circ u) D_j u$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.10: Für $f(0) = 0$ ist dies Satz 6.21^{AU} im Buch. Im allgemeinen Fall erfüllt zumindest $g(x) := f(x) - f(0)$ die Voraussetzungen von Satz 6.21^{AU}, woraus $g \circ u \in H^1(\Omega)$ und $D_j(g \circ u) = (g' \circ u) D_j u$ folgt. Wegen $f \circ u = (g \circ u) + f(0)\mathbb{1}_\Omega$ und $\mathbb{1}_\Omega \in H^1(\Omega)$ mit $D_j \mathbb{1}_\Omega = 0$ folgt daraus die Behauptung. \triangle

Aufgabe 6.11: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und u und v in $H^1(\Omega)$.

- a) Zeigen Sie, dass auch $w := u \wedge v$, definiert durch $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$, in $H^1(\Omega)$ liegt, und bestimmen Sie die schwache Ableitung.
- b) Zeigen Sie, dass $(-u) \wedge (-v) = -(u \vee v)$, und schließen Sie, dass auch $(u \vee v)(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ eine Funktion $u \vee v \in H^1(\Omega)$ definiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.11: Man macht sich leicht klar, dass $w = u - (u - v)^+$ gilt, woraus nach Satz 6.35^{AU} $w \in H^1(\Omega)$ und

$$D_j w = D_j u - D_j(u - v)\mathbb{1}_{\{u > v\}} = \begin{cases} D_j v, & \text{auf } \{u > v\}, \\ D_j u, & \text{auf } \{u \leq v\}. \end{cases}$$

folgt. Aufgabenteil b) ist nun klar.

Bemerkung: Es scheint zunächst, dass die Formel für $D_j w$ nicht symmetrisch in u und v ist, aber dies ist nicht der Fall, da nach dem Lemma von Stampacchia (Korollar 6.36^{AU}) $D_j u$ und $D_j v$ auf $\{u = v\}$ fast überall übereinstimmen. \triangle

Aufgabe 6.12: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen (nicht notwendigerweise beschränkt). Zeigen Sie:

- a) Ist $u \in H^1(\Omega)$, so ist auch $u \wedge \mathbb{1}_\Omega$ in $H^1(\Omega)$. Bestimmen Sie die Ableitung.
- b) $L_\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.12: Zu Aufgabenteil a): Wir weisen nach, dass $w := \mathbb{1}_{\{u < 1\}} D_j u$ die schwache Ableitung $D_j v$ von $v := u \wedge \mathbb{1}_\Omega$ ist, woraus insbesondere $v \in H^1(\Omega)$ folgt, da offenbar $v \in L_2(\Omega)$ und $w \in L_2(\Omega)$ erfüllt ist.

Sei dazu $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Testfunktion und U eine beschränkte offene Teilmenge von Ω , die $\text{supp } \phi$ enthält. Weil $u|_U$ und $\mathbb{1}_U$ in $H^1(U)$ liegen, folgt aus Aufgabe 6.11^{AU} a), dass $v|_U = u|_U \wedge \mathbb{1}_U$ in $H^1(U)$ liegt und die Ableitung $D_j(v|_U) = D_j(v|_U)\mathbb{1}_{\{u < 1\}} = w|_U$ hat. Daher gilt

$$\int_\Omega v D_j \phi = \int_U v|_U D_j \phi = - \int_U D_j(v|_U) \phi = - \int_U w|_U \phi = - \int_\Omega w \phi,$$

was gerade die Behauptung zeigt.

Nun zu Aufgabenteil b): Wegen $u \wedge c\mathbb{1} = c(\frac{u}{c} \wedge \mathbb{1})$ und $u \vee -c\mathbb{1} = -c(\frac{u}{c} \wedge \mathbb{1})$ für $c > 0$ ist nach dem vorigen Aufgabenteil für jedes $u \in H^1(\Omega)$ die Funktion

$u_n := (u \wedge n\mathbb{1}) \vee -n\mathbb{1}$ wieder in $H^1(\Omega)$ mit $D_j u_n = \mathbb{1}_{\{|u| < n\}} D_j u$. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert (u_n) in $H^1(\Omega)$ gegen u . Da jedes u_n offenbar in $L_\infty(\Omega)$ liegt, zeigt dies die Behauptung. \triangle

Aufgabe 6.13: Betrachten Sie die in Satz 6.43^{AU} gegebene Situation mit $\lambda > 0$. Sei $f(x) \leq 1$ fast überall. Zeigen Sie, dass $\lambda u(x) \leq 1$ fast überall.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.13: Sei $\lambda > 0$, $f \in L_2(\Omega)$ mit $f(x) \leq 1$ fast überall. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\lambda u - \Delta u = f$. Nach Lemma 6.42^{AU} heißt das, dass

$$\lambda \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Wir wollen zeigen, dass $\lambda u(x) \leq 1$ fast überall. Sei $v = (\lambda u - 1)^+$. Dann ist $v \in H^1(\Omega)$ und $0 \leq v \leq \lambda u^+$. Aus Satz 6.39^{AU} folgt, dass $v \in H_0^1(\Omega)$. Damit können wir v oben einsetzen. Da $D_j v = \mathbb{1}_{\{\lambda u > 1\}} \lambda D_j u$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\{\lambda u > 1\}} \lambda u (\lambda u - 1) \, dx + \lambda \int_{\{\lambda u > 1\}} |\nabla u|^2 \, dx &= \int_{\{\lambda u > 1\}} f (\lambda u - 1)^+ \, dx \\ &\leq \int_{\{\lambda u > 1\}} (\lambda u - 1)^+ \, dx \end{aligned}$$

da $f \leq 1$. Somit ist

$$\int_{\{\lambda u > 1\}} (\lambda u - 1)^2 \, dx + \lambda \int_{\{\lambda u > 1\}} |\nabla u|^2 \, dx \leq 0.$$

Daraus folgt, dass $\lambda u(x) \leq 1$ fast überall. \triangle

Aufgabe 6.14: (Satz von Riemann-Lebesgue.) Sei $d \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei $C_0(\mathbb{R}^d) := \{u \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

- Ist $u \in L_1(\mathbb{R}^d)$, so ist $\hat{u} \in C(\mathbb{R}^d)$.
- Die Abbildung $u \mapsto \hat{u}$ ist von $L_1(\mathbb{R}^d)$ nach $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ linear und stetig.
- Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|\hat{u}(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Insbesondere gilt $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Hinweis: Man kann die Rechenregeln für die Fourier-Transformation ausnutzen.
- Für jedes $u \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Erinnerung: $C_0(\mathbb{R}^d)$ ist in $L_\infty(\Omega)$ abgeschlossen.
Hinweis: Man darf hier ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in $L_1(\mathbb{R}^d)$ dicht ist; diesen Satz kann man ähnlich wie im Fall $L_2(\mathbb{R}^d)$ zeigen, vgl. Korollar 6.9^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.14:

a) Nach Definition ist

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) e^{-ix \cdot y} dy.$$

Ist (x_n) eine Folge in \mathbb{R}^d , die gegen ein x konvergiert, so konvergiert $u(y) e^{-ix_n \cdot y}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ gegen $u(y) e^{-ix \cdot y}$. Zudem ist $|u(y) e^{-ix_n \cdot y}| \leq |u(y)|$ und nach Voraussetzung $|u| \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert also $\hat{u}(x_n)$ gegen $\hat{u}(x)$. Das zeigt die Stetigkeit von \hat{u} .

b) Die Linearität ist klar. Die Abschätzung

$$|\hat{u}(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)| |e^{-ix \cdot y}| dy \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}$$

zeigt $\hat{u} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, und

$$\|\hat{u}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}.$$

Damit ist die Abbildung $u \mapsto \hat{u} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$ stetig (siehe Satz A.1^{AU}).

c) Die Funktion $v := u - \sum_{j=1}^d D_j^2 u$ liegt wieder in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$. Also ist $\hat{v} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ und hat nach Satz 6.47^{AU} die Darstellung

$$\hat{v} = \hat{u} - \sum_{j=1}^d (ix_j)^2 \hat{u} = (1 + |x|^2) \hat{u}.$$

Hieraus folgt die Behauptung mit $c := \|\hat{v}\|_\infty$.

d) Sei $u \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Laut Hinweis gibt es eine Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, die in $L_1(\mathbb{R}^d)$ gegen u konvergiert. Nach dem bereits Gezeigten ist $\hat{u}_n \in C_0(\mathbb{R}^d)$, und (\hat{u}_n) konvergiert wegen b) in $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ gegen \hat{u} . Weil $C_0(\mathbb{R}^d)$ in $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen ist, folgt daraus $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

△

Aufgabe 6.15: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$, $f \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, so dass $\Delta u = f$ schwach. Zeigen Sie, dass für $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt:

$$\Delta(\widetilde{\eta u}) = [(\Delta \eta)u + 2\nabla \eta \nabla u + f\eta].$$

Man benutze dazu (6.59^{AU}).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.15: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$, $f \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, so dass schwach $\Delta u = f$; d.h.

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sei $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir wollen zeigen, dass

$$\Delta(\eta u) = [(\Delta\eta)u + 2\nabla\eta \nabla u + f u]$$

schwach in \mathbb{R}^d , d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\eta u) \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} ((\Delta\eta)u + 2\nabla\eta \nabla u + f u) \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Da $\Delta(\varphi\eta) = (\Delta\varphi)\eta + 2\nabla\varphi \nabla\eta + \varphi\Delta\eta$, ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\eta u} \Delta \varphi \, dx &= \int_{\Omega} (u \Delta(\varphi\eta) - u 2\nabla\varphi \nabla\eta - u\varphi\Delta\eta) \, dx \\ &= \int_{\Omega} f\varphi\eta \, dx - 2 \int_{\Omega} u \nabla\varphi \nabla\eta \, dx - \int_{\Omega} u\varphi\Delta\eta \, dx, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\varphi\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \nabla\eta \nabla\varphi &= \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} u D_j (D_j \eta \cdot \varphi) \, dx - \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} u (D_j^2 \eta) \varphi \, dx \\ &= - \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} D_j u D_j \eta \varphi - \int_{\Omega} (\Delta\eta) u \varphi \, dx, \end{aligned}$$

da ja $D_j \eta \cdot \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\eta u} \Delta \varphi \, dx &= \int_{\Omega} f\varphi\eta \, dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla\eta \varphi \, dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} (\Delta\eta) u \varphi \, dx - \int_{\Omega} u\varphi\Delta\eta \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} [f\eta + 2\nabla u \nabla\eta + \Delta\eta u] \varphi \, dx. \end{aligned}$$

△

Aufgabe 6.16: Beweisen Sie die Identität (6.67^{AU}).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.16: Sei $u \in C^2(\mathbb{D})$ mit $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und sei $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $0 < r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} v_r &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ v_\theta &= -r \sin \theta u_x + r \cos \theta u_y. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} v_r \cos \theta &= u_x \cos^2 \theta + u_y \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\frac{v_\theta}{r} \sin \theta &= u_x \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta \cdot u_y. \end{aligned}$$

Die Summe dieser Gleichung ist

$$\cos \theta v_r - \sin \theta \frac{v_\theta}{r} = u_x.$$

Ähnlich folgt aus den ersten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} v_r \sin \theta &= u_x \cos \theta \sin \theta + u_y \sin^2 \theta \\ \frac{v_\theta}{r} \cos \theta &= -\sin \theta \cos \theta u_x + \cos^2 \theta \cdot u_y. \end{aligned}$$

Summieren ergibt

$$v_r \sin \theta + \frac{v_\theta}{r} \cos \theta = u_y.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} u_x^2 &= (\cos^2 \theta) v_r^2 - 2 \cos \theta \cdot \sin \theta \frac{v_r v_\theta}{r} + (\sin^2 \theta) \frac{v_\theta^2}{r^2} \\ u_y^2 &= (\sin^2 \theta) v_r^2 + 2 \cos \theta \cdot \sin \theta \frac{v_r v_\theta}{r} + (\cos^2 \theta) \frac{v_\theta^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 = v_r^2 + \frac{v_\theta^2}{r^2}.$$

△

Aufgabe 6.17: Zeigen Sie direkt, ohne die Benutzung der H^1 -Barriere, dass jede beschränkte, offene Teilmenge Ω von \mathbb{R} Dirichlet-regulär ist.

Anleitung: Ω ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.17:

a) Sei $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig; d.h. es gibt $L \geq 0$, so dass

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \partial\Omega.$$

Dann gibt es genau eine Lösung des Dirichlet Problems $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = g$.

Es ist Ω die disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen (a_n, b_n) , $n \in J$, wobei J endlich oder $J = \mathbb{N}$ ist. Definiere u auf $[a_n, b_n]$ durch

$$u(x) = g(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} (g(b_n) - g(a_n)).$$

Dann ist $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und Lipschitz-stetig. Seien nämlich $x, y \in \Omega$. Dann gibt es $n \in J$ mit $x \in (a_n, b_n)$ und es gibt $m \in J$ mit $y \in (a_m, b_m)$.

1. Fall: Es ist $n = m$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left| (x - y) \frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} \right| \\ &\leq L|x - y|. \end{aligned}$$

2. Fall: Es ist $n \neq m$. Sei OBdA $b_m \leq a_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u(a_n)| + |g(a_n) - g(b_m)| + |u(b_m) - u(y)| \\ &\leq L(x - a_n) + L(a_n - b_m) + L(b_m - y) \\ &= L(x - y). \end{aligned}$$

Damit ist u Lipschitz-Stetig mit Konstante L .

Also hat u eine eindeutige Fortsetzung $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$. Da $\bar{u}(z) = g(z)$ für $z = a_n, b_n, n \in J$, folgt $\bar{u}(z) = g(z)$ für alle $z \in \partial\Omega$.

b) Sei $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Lipschitz-stetige Funktionen $g_n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen g konvergieren (benutze den Satz von Stone-Weierstraß (Satz A.5^{AU})). Nach a) gibt es

$$u_n \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \text{ so dass } u_n'' = 0, u_n|_{\partial\Omega} = g_n.$$

Es ist

$$\|u_n - u_m\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|g_n - g_m\|_{C(\partial\Omega)}$$

wegen des Maximum-Prinzips (6.70^{AU}). Damit konvergiert u_n gleichmäßig auf $\bar{\Omega}$ gegen ein $u \in C(\bar{\Omega})$. Da u_n harmonisch ist, ist es auch u (siehe den Beweis von Satz 6.72^{AU} a)).

△

Aufgabe 6.18: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und konvex. Sei $g \in C(\partial\Omega)$ und sei $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine klassische Lösung des Dirichlet-Problems (6.63^{AU}). Es gebe $G \in H^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ derart, dass $G|_{\partial\Omega} = g$. Zeigen Sie, dass $u \in H^2(\Omega)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.18: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und konvex. Sei $G \in H^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, so dass $\Delta u = 0$ in Ω und $u|_{\partial\Omega} = G|_{\partial\Omega}$. Sei $v \in H_{\text{loc}}^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, so dass $-\Delta v = \Delta G$, d.h., v ist die Lösung des Problems (6.81^{AU}) für $f = \Delta G$. Nach Satz 6.87^{AU} ist $v \in H^2(\Omega)$. Aus Satz 6.64^{AU} folgt, dass $u = v + G$. Da v und $G \in H^2(\Omega)$ folgt, dass $u \in H^2(\Omega)$. △

Aufgabe 6.19: Beweisen Sie Korollar 6.23^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.19: Sei B eine orthogonale $d \times d$ -Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^d$, $F(y) = By + b$, $y \in \mathbb{R}^d$. Sei $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\Omega_1 := F(\Omega_2)$. Die Abbildung

$T : L_2(\Omega_2) \rightarrow L_2(\Omega_1)$, gegeben durch $Tu = u \circ F$ ist linear und bijektiv mit Inverser $(T^{-1}v)(x) = v(B^{-1}(x - b))$. Die Transformationsformel ergibt

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{L_2(\Omega_1)}^2 &= \int_{F(\Omega_2)} |u(F(y))|^2 dy \\ &= \int_{\Omega_1} |u(x)|^2 dx = \|u\|_{L_2(\Omega_1)}^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung unitär. Aus Satz 6.22^{AU} folgt, dass $TH^1(\Omega_2) = H^1(\Omega_1)$ und für $u \in H^1(\Omega_2)$ ist

$$D_j(u \circ F) = \sum_{i=1}^d (D_i u) \circ F \cdot \frac{\partial F_i}{\partial y_j}.$$

Da $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y) = b_{ij}$ für alle $y \in \Omega_2$, ist $\nabla(u \circ F) = (\nabla u) \circ F \cdot B$ (wobei der Punkt für die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix steht). Da B orthogonal ist, ist $\|\nabla u(F(y)) \cdot B\| = \|\nabla u(F(y))\|$ für alle $y \in \Omega_2$. Damit folgt aus der Transformationsformel, dass $\|\nabla Tu\|_{L_2(\Omega_1)}^2 = \|\nabla(u \circ F)\|_{L_2(\Omega_1)}^2 = \|\nabla u \circ F\|_{L_2(\Omega_2)}^2 = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_2)}^2$. Damit ist

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{H^1(\Omega_1)}^2 &= \|Tu\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|\nabla Tu\|_{L_2(\Omega_1)}^2 \\ &= \|u\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|Tu\|_{L_2(\Omega_1)}^2. \end{aligned}$$

Damit ist T isometrisch und somit unitär als Abbildung von $H^1(\Omega_2)$ nach $H^1(\Omega_1)$.

Da $T\mathcal{D}(\Omega_2) = \mathcal{D}(\Omega_1)$, folgt $TH_0^1(\Omega_2) = \overline{T\mathcal{D}(\Omega_2)}^{H^1} = \overline{\mathcal{D}(\Omega_1)}^{H^1} = \mathcal{D}(\Omega_1)^{H^1} = H_0^1(\Omega_1)$. \triangle

Aufgabe 6.20: (Invarianz der Poisson-Gleichungen unter Isometrien.) Sei B eine orthogonale $d \times d$ -Matrix, $b \in \mathbb{R}^d$, $F(y) = By + b$ für $y \in \mathbb{R}^d$. Sei $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, $\Omega_1 := F(\Omega_2)$. Sei $f \in L_2(\Omega_1)$, $u \in H_0^1(\Omega_1) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega_1)$ derart, dass $-\Delta u = f$. Zeigen Sie, dass $u \circ F \in H_0^1(\Omega_2) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega_2)$ und $-\Delta(u \circ F) = f \circ F$.

Anleitung: Benutzen Sie, dass die Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$, $v \in H_0^1(\Omega)$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.20: Sei $u \in H_0^1(\Omega_1)$, $-\Delta u = f \in L_2(\Omega_1)$. Aus Aufgabe 6.19^{AU} folgt, dass $u \circ F \in H_0^1(\Omega_2)$ und $f \circ F \in L_2(\Omega_2)$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla \varphi dy = \int_{\Omega_1} (f \circ F) \varphi dx.$$

Man beachte, dass für $y_1, y_2 \in \Omega_2$ gilt: $(By_1) \cdot (By_2) = y_1 \cdot y_2$, da B orthogonal ist. Setze $\psi = \varphi \circ F^{-1}$. Dann ist $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ und $\varphi = \psi \circ F$. Ferner ist $\nabla(u \circ F) =$

$((\nabla u) \circ F) \cdot B$ (siehe Aufgabe 6.19^{AU}). Damit ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla \varphi \, dy &= \int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla(\psi \circ F) \, dy \\
 &= \int_{\Omega_2} ((\nabla u) \circ F \cdot B) \cdot ((\nabla \psi) \circ F \cdot B) \, dy \\
 &= \int_{\Omega_2} (\nabla u \circ F) \cdot (\nabla \psi \circ F) \, dy \\
 &= \int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \\
 &= \int_{\Omega_1} f \psi \, dx \\
 &= \int_{\Omega_2} f \circ F \cdot \psi \circ F \, dy = \int_{\Omega_2} (f \circ F) \varphi \, dy.
 \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $-\Delta u = f$, $u \in H_0^1(\Omega_1)$. \triangle

Aufgabe 6.21: (Allgemeiner linearer elliptischer Differenzialoperator.) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien a_{ij} , b_j , c_i und e in $L^\infty(\Omega)$. Für den formalen Differenzialoperator $Lu := -\sum_{j=1}^d D_j \left(\sum_{i=1}^d a_{ij} D_i u + b_j u \right) + \sum_{i=1}^d c_i D_i u + eu$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ versteht man unter einer schwachen Lösung des Problems

$$(D) \quad Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a_L(u, v) := \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j v + \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} b_j u D_j v + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} c_i D_i u v + \int_{\Omega} e u v = \int_{\Omega} f v$$

für alle Testfunktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es gebe $\alpha > 0$ mit $\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

- Die Form a_L ist auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ bilinear und stetig.
- Gibt es $\delta < 2\alpha$ mit $\sum_{j=1}^d (b_j + c_j)^2 \leq 2\delta e$ fast überall, so besitzt (D) eine eindeutige schwache Lösung.
Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $xy \leq \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} y^2$.
- Sind b_i und c_i stetig differenzierbar und gilt $\sum_{i=1}^d (D_i b_i + D_i c_i) \leq 2e$ fast überall, so besitzt (D) eine eindeutige schwache Lösung.
- Sind alle Funktionen hinreichend regulär und ist u eine schwache Lösung des Problems, so ist der Ausdruck Lu in der oben angegebenen Form wohldefiniert und eine reguläre Funktion u , die in $H_0^1(\Omega)$ liegt, ist genau dann eine schwache Lösung,

wenn sie $Lu = f$ im klassischen Sinn erfüllt. Versuchen Sie, möglichst schwache Regularitätsvoraussetzungen zu stellen!

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.21:

a)-c) genau wie in Abschnitt 6.10^{AU}, nur muss man das c_i noch behandeln, was aber genau wie für b_i möglich ist.

d) Seien zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen a_{ij} und b_j in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $D_k a_{ij}$ und $D_k b_j$ in $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle k . Die Produktregel für Sobolev-Funktionen garantiert, dass $a_{ij} D_i u$ und $b_j u$ für $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ wieder in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ liegen. Also ist Lu für alle Funktionen in $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ im Sinne von schwachen Ableitungen erklärt, und $Lu \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

Eine Funktion $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ mit $Lu = f$ im Sinne von schwachen Ableitungen heißt *starke Lösung* von (D) . Nach Definition der schwachen Ableitung erfüllt eine starke Lösung für jede Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} L u v = a_L(u, v),$$

ist also eine schwache Lösung.

Ist umgekehrt u eine schwache Lösung, die in $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ liegt, so gilt nach Definition der schwachen Ableitung und der schwachen Lösung

$$\int_{\Omega} L u v = a_L(u, v) = \int_{\Omega} f v$$

für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da die Testfunktionen in $L^2(\Omega)$ dicht liegen, stimmt daher $Lu|_U$ für jedes $U \Subset \Omega$ in $L^2(U)$ mit $f|_U$ überein. Das zeigt $Lu = f$ fast überall, also dass u eine starke Lösung ist.

Bemerkung: Setzt man überall statt schwacher Differenzierbarkeit klassische Differenzierbarkeit voraus, liefern die gleichen Argumente ein analoges Resultat für klassische anstelle von starken Lösungen.

△

Aufgabe 6.22: (Zusammensetzen von H^1 -Funktionen.) Betrachten Sie eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$. Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ differenzierbar in $\Omega \setminus G$ mit beschränkten partiellen Ableitungen. Dann ist $u \in H^1(\Omega)$.

Anleitung: Nach Drehung kann man annehmen, dass $G = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.22: Indem wir das Koordinatensystem drehen, können wir annehmen, dass $G = \mathbb{R} \times \{0\}$. Wir definieren $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf $\Omega \setminus G$ und $v_j = 0$ auf $\Omega \cap G$. Da G eine Nullmenge ist, ist $v_j \in L^2(\Omega)$. Wir zeigen, dass v_j ,

$j = 1, 2$, die schwachen Ableitungen von u sind. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir müssen also zeigen, dass

$$-\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} v_j \varphi dx, \quad j = 1, 2.$$

Sei $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ derart, dass $\eta = 1$ auf einer Umgebung V von $\text{supp } \varphi$ und definiere $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $v = \eta u$ auf Ω und $v = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Dann ist v stetig auf \mathbb{R}^2 , stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus G$ und $\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf $V \setminus G$. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx &= -\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} v(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 v(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 + \int_{\mathbb{R}} v(x_1, 0) \varphi(x_1, 0) dx_1 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 - \int_{\mathbb{R}} v(x_1, 0) \varphi(x_1, 0) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus G} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dx = \int_{\Omega} v_2 \varphi dx. \end{aligned}$$

Für die Ableitung nach x_1 gilt:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx &= -\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}} v(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} v_1 \varphi dx. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. \triangle

Aufgabe 6.23: (Sobolev-Einbettung.)

- a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 < p_1, p_2, r < \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}$. Seien $f_1 \in L_{p_1}(\Omega_1)$, $f_2 \in L_{p_2}(\Omega_2)$. Zeigen Sie, dass $f_1 \cdot f_2 \in L_r(\Omega)$. Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung: Wenn $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $g \in L_p(\Omega)$, $h \in L_{p'}(\Omega)$, so ist $g \cdot h \in L_1(\Omega)$.
- b) Sei $d = 2$, $g(x) = (1 + |x|)^{-1}$. Zeigen Sie, dass $g \in L_q(\mathbb{R}^2)$ für alle $2 < q < \infty$.
- c) Zeigen Sie, dass $\hat{H}_1(\mathbb{R}^2) \subset L_p(\mathbb{R}^2)$ für alle $1 < p \leq 2$, wobei $\hat{H}_1(\mathbb{R}^2) = \mathcal{FH}^1(\mathbb{R}^2)$ (siehe Satz 6.47^{AU}).

d) Zeigen Sie, dass $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L_q(\mathbb{R}^2)$ für alle $q \in [2, \infty)$. Benutzen Sie, dass für $1 < p < 2$, $\mathcal{F}^{-1}(L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_p(\mathbb{R}^d)) \subset L_{p'}(\mathbb{R}^d)$ (Satz von Hausdorff-Young [3, Satz V.2.10]).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.23:

a) Es ist $|f_1|^r \in L_p(\Omega)$, $|f_2|^r \in L_{p'}(\Omega)$, wobei $p = \frac{r}{r-1}$, $p' = \frac{r}{r-1}$. Da $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, folgt aus der Hölder-Ungleichung $|f_1|^r |f_2|^r \in L_1(\Omega)$; d.h. $f_1 \cdot f_2 \in L_r(\Omega)$.

b) Man muss nur zeigen, dass $\int_{|x| \geq r} g(x)^q dx < \infty$. Es ist

$$\int_{|x| \geq r} g(x)^q dx \leq \int_{|x| \geq r} |x|^{-q} dx = \sigma(S^1) \int_1^\infty r^{-q} r dr < \infty$$

falls $-q + 2 < 0$; d.h. $2 < q$.

c) Sei $f \in \hat{H}^1(\mathbb{R}^2)$; d.h. $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ und $\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2(1 + |x|)^2 dx < \infty$. Sei $h(x) = 1 + |x|$. Somit ist $f \cdot h \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Nach b) ist $g = \frac{1}{h} \in L_q(\mathbb{R}^2)$ für alle $2 < q < \infty$. Sei $1 < p < 2$. Wähle $2 < q < \infty$, so dass $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Nach a) ist $f = (f \cdot h) \cdot g \in L_p(\mathbb{R}^2)$.

d) Sei $2 \leq q < \infty$. Wir wollen zeigen, dass $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L_q(\mathbb{R}^2)$. Wähle $1 < p \leq 2$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{F}u \in \hat{H}^1(\mathbb{R}^2) \subset L_p(\mathbb{R}^2)$. Der Satz von Hausdorff-Young impliziert, dass $u = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u \in L_{p'}(\mathbb{R}^2) = L_q(\mathbb{R}^2)$.

Kommentar:

Der Satz von Hausdorff-Young sagt noch weiter, dass

$$\|\mathcal{F}^{-1}f\|_{L_{p'}} \leq c\|f\|_{L_p}$$

für $f \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_p(\mathbb{R}^d)$. Damit gibt es eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{F}_p : L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{p'}(\mathbb{R}^d)$, so dass $\mathcal{F}_p f = \mathcal{F}f$ für $f \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_p(\mathbb{R}^d)$. Kurz ausgedrückt: Die Fourier-Transformation ist ein stetiger Operator von $L_p(\mathbb{R}^d)$ nach $L_{p'}(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p \leq 2$, wobei $1' = \infty$. \triangle

Aufgabe 6.24: Verifizieren Sie die Rechnung aus Satz 6.60^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.24: Sei $u(x, y) = (x^2 - y^2) \log(-\log r)$ für $0 < r < \frac{1}{2}$ wobei $r := x^2 + y^2$. Beachte, dass $r_x = \frac{x}{r}$. Somit ist

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \log(-\log r) + (x^2 - y^2) \frac{1}{-\log r} \frac{-1}{r} \cdot \frac{x}{r} \\ &= 2x \log(-\log r) + (x^3 - xy^2) \frac{1}{r^2 \log r}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 2 \log(-\log r) + 2x \frac{1}{-\log r} \frac{-1}{r} \cdot \frac{x}{r} \\ &\quad + (3x^2 - y^2) \frac{1}{r^2 \log r} + (x^3 - xy^2) \frac{-1}{r^4 (\log r)^2} (2x \log r + x), \end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$ und somit $(\frac{1}{r^2 \log r})_x = -\frac{(r^2 \log r)_x}{r^4 (\log r)^4}$, sowie

$$\begin{aligned} (r^2 \log r)_x &= 2rr_x \log r + r^2 (\log r)_x \\ &= 2x \log r + r^2 \frac{1}{r} r_x = 2x \log r + x. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 2 \log(-\log r) + \frac{5x^2 - y^2}{r^2 \log r} \\ &\quad - 2 \frac{x^4 - x^2 y^2}{r^4 \log r} - \frac{x^4 - x^2 y^2}{r^4 (\log r)^2} \\ &= 2 \log(-\log r) + \frac{5x^2 - y^2}{r^2 \log r} - \frac{-(2 \log r + 1)(x^4 - x^2 y^2)}{r^4 (\log r)^2}. \end{aligned}$$

Der erste Term strebt gegen ∞ mit $r \downarrow 0$, der zweite und dritte streben gegen 0.

Dazu beachte man, dass $\log r \rightarrow \infty$ mit $r \downarrow 0$, und $\frac{x^2}{r^2} \leq 1$, $\frac{y^2}{r^2} \leq 1$.

Schließlich folgt aus $u(x, y) = -u(y, x)$, dass $u_y(x, y) = -u_x(y, x)$ und $u_{yy}(x, y) = -u_{xx}(y, x)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= u_{xx}(x, y) - u_{yy}(y, x) \\ &= \frac{5x^2 - y^2 - (5y^2 - x^2)}{r^2 \log r} - \frac{2 \log r + 1}{r^4 (\log r)^2} [x^4 - x^2 y^2 - y^4 + x^2 y^2] \\ &= 6 \frac{x^2 - y^2}{r^2 \log r} - \frac{2 \log r + 1}{r^2 (\log r)^2} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ &= \frac{(x^2 - y^2)}{r^2} \cdot \left(\frac{4}{\log r} - \frac{1}{(\log r)^2} \right). \end{aligned}$$

Somit ist $\lim_{r \downarrow 0} \Delta u = 0$.

△

7 Aufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1: Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Zeigen Sie: Jede positive Linearform auf $C(K)$ ist stetig (vgl. Definition 7.9^{AU}).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.1: Die Einheitskugel von $C(K)$ ist das Ordnungsintervall $[-\mathbb{1}_K, \mathbb{1}_K] := \{u \in C(K) : -\mathbb{1}_K \leq u \leq \mathbb{1}_K\}$. Ist $\varphi : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ linear und positiv, so folgt aus $-\mathbb{1}_K \leq u \leq \mathbb{1}_K$, dass $-\varphi(\mathbb{1}_K) \leq \varphi(u) \leq \varphi(\mathbb{1}_K)$. Damit ist $|\varphi(u)| \leq \varphi(\mathbb{1}_K)$. Aus Satz A.1^{AU} folgt, dass φ stetig ist und $\|\varphi\| \leq \varphi(\mathbb{1}_K)$. Offensichtlich ist sogar $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1}_K)$, da ja $\mathbb{1}_K$ in der Einheitskugel ist. △

Aufgabe 7.2:

a) Sei $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit C^1 -Rand und sei $z \in \Omega$. Sei $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \setminus \{z\})$, so dass $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf $\Omega \setminus \{z\}$ beschränkt ist, $j = 1, \dots, d$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega)$. Anleitung: Multiplizieren Sie $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ mit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und integrieren Sie partiell auf $\Omega \setminus \bar{B}(z, \varepsilon)$.

b) Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$, $u(x, y) = (x^2 - y^2) \log |\log r|$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(B)$, vgl. Satz 6.60^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.2:

a) Sei $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit C^1 -Rand, $u \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \{z\})$, so dass $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf $\Omega \setminus \{z\}$ beschränkt ist, $j = 1, \dots, d$. Setze $D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf $\Omega \setminus \{z\}$ und $(D_j u)(z) = 0$, $j = 1, \dots, d$. Dann ist $D_j u \in L_2(\Omega)$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir zeigen, dass

$$-\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} (D_j u) \varphi dx.$$

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\bar{B}(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Dann ist nach Korollar 7.7^{AU}

$$-\int_{\Omega \setminus \bar{B}(z, \varepsilon)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega \setminus \bar{B}(z, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{|z-x|=\varepsilon} u \varphi \left(\frac{z_j - x_j}{\varepsilon} \right) d\sigma.$$

Da $u\varphi$ beschränkt, $d \geq 2$ und das Oberflächenmaß der Sphäre $S_\varepsilon = \{x : |z - x| = \varepsilon\}$ gerade $\sigma(S^1)\varepsilon^{d-1}$ ist, konvergiert das zweite Integral auf der rechten Seite nach 0, wenn $\varepsilon \downarrow 0$. Somit ergibt sich mit $\varepsilon \downarrow 0$

$$-\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} D_j u \varphi dx.$$

Damit ist $D_j u$ die j -te schwache Ableitung von u und somit ist $u \in H^1(\Omega)$.

b) Es ist (vgl. Lösung der Aufgabe 6.24)

$$u_x = 2x \log |\log r| + (x^3 - y^3 x) \frac{1}{r^2 \log r}.$$

Wegen $u(x, y) = -u(y, x)$ ist $u_y(x, y) = -u_x(y, x)$. Damit ist u_x, u_y auf $B \setminus \{0\}$ beschränkt. Aus a) folgt, dass $u \in H^1(B)$.

△

Aufgabe 7.3: Sei $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ und seien $u, f \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. Es gelte $\Delta u = f$ schwach in Ω_1 und in Ω_2 . Zeigen Sie, dass $\Delta u = f$ in Ω .

Anleitung: Benutzen Sie eine Zerlegung der Eins.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.3: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gibt es $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, so dass $\text{supp } \eta_j \subset \Omega_j, j = 1, 2$ und $\eta_1 + \eta_2 = 1$ auf $\text{supp } \varphi$ (Zerlegung der Eins). Dann ist $\varphi \eta_j \in \mathcal{D}(\Omega_j), j = 1, 2$. Daher ist nach Voraussetzung

$$\int_{\Omega} u \Delta(\varphi \eta_j) = \int_{\Omega} f \varphi \eta_j, \quad j = 1, 2.$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

Damit ist gezeigt, dass $\Delta u = f$ schwach in Ω gilt.

△

Aufgabe 7.4: (Poincaré-Ungleichung.) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen derart, dass die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ kompakt ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt derart, dass $\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$. Wo geht im Beweis die Kompaktheit der Einbettung ein? Man kann sich an dem Beweis von Satz 7.28^{AU} orientieren.

b) Geben Sie ein Beispiel einer unbeschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, so dass die Einbettung kompakt ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Bemerkung nach Satz 6.55^{AU}.

c) Geben Sie ein Beispiel einer offenen Menge an, für die die Poincaré-Ungleichung verletzt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.4:

a) Ist die Ungleichung falsch, so gibt es $u_n \in H_0^1(\Omega)$ derart, dass

$$1 = \int_{\Omega} |u_n|^2 dx \geq n \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Damit ist $\|u_n\|_{H^1}^2 \leq 2$. Nach Satz 4.35^{AU} können wir annehmen, dass $u_n \rightharpoonup u$ schwach in $H_0^1(\Omega)$, andernfalls gehen wir zu einer Teilfolge über. Da die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ kompakt ist, folgt, dass $u_n \rightarrow u$ in $L_2(\Omega)$. Damit ist $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$ und das ist der entscheidende Punkt, in den die Kompaktheit eingeht. Da $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow 0$, ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_j u) \varphi dx &= - \int_{\Omega} u D_j \varphi dx \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n D_j \varphi dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D_j u_n) \varphi dx = 0 \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Somit ist $D_j u = 0$. Also ist $u = 0$ nach Korollar 6.28^{AU}. Das widerspricht der Tatsache, dass $\|u\|_{L_2} = 1$.

b) Wähle z.B.

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, |y| < \gamma(x)\}$$

mit $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $0 < x \leq 1$ und $\gamma(x) = \frac{1}{x^2}$ für $1 < x \leq \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_0^1 \int_{-x^{-\frac{1}{2}}}^{x^{\frac{1}{2}}} 1 dy dx + \int_1^{\infty} \int_{-\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{x^2}} 1 dy dx \\ &= 2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz 6.55^{AU} zeigt, dass die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ kompakt ist.

c) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Wähle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$, $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(\frac{x}{n})$. Dann ist $\|u_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, aber $u_n'(x) = \frac{1}{n^{3/2}} \varphi'(\frac{x}{n})$. Somit gilt

$$\int_{\mathbb{R}} u_n'^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y)^2 dy \rightarrow \infty.$$

Damit ist die Poincaré-Ungleichung für $\Omega = \mathbb{R}$ verletzt.

△

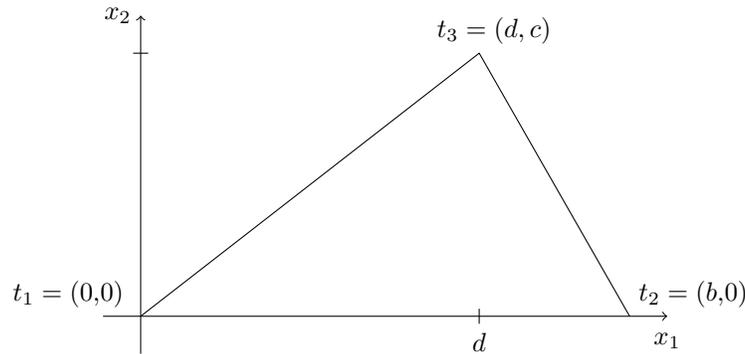
Aufgabe 7.5: (Satz von Gauß für Dreiecke.) Ein Segment im \mathbb{R}^2 ist eine Menge der Form $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$

die Eckpunkte von $[x, y]$ sind. Wir definieren das Maß σ auf $[x, y]$ durch $\int_{[x,y]} f d\sigma = |y-x| \int_0^1 f(\lambda x + (1-\lambda)y) d\lambda$ für alle $f \in C[x, y]$ (vgl. Satz 7.10^{AU}). Ist T ein Dreieck mit den Eckpunkten $\{t_1, t_2, t_3\}$, so ist $\partial T = [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup [t_1, t_3]$. Für $f \in C(\partial T)$ definieren wir $\int_{\partial T} f d\sigma = \int_{[t_1, t_2]} f d\sigma + \int_{[t_2, t_3]} f d\sigma + \int_{[t_1, t_3]} f d\sigma$.

a) Sei $u \in C^1(\bar{T})$. Zeigen Sie, dass $\int_T u_{x_j} dx = \int_{\partial T} u \nu_j d\sigma$. Dabei ist ν_j die äußere Normale $j = 1, 2$. **Anleitung:** Nach Drehung und Verschiebung kann man annehmen, dass $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (b, 0)$, $t_3 = (d, c)$ mit $0 < d < b$, $c > 0$.

b) Zeigen Sie, dass $\int_T (D_j u) v dx = - \int_T u D_j v dx + \int_{\partial T} \nu_j u v d\sigma$ für $u, v \in C^1(\bar{T})$ und $j = 1, 2$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.5: Wir betrachten das Dreieck mit den Eckpunkten $t_1 = (0, 0)$, $t_2 = (b, 0)$, $t_3 = (d, c)$ wobei $0 < d < b$, $0 < c$.



Die äußere Normale ist $(0, -1)$ auf $[t_1, t_2]$, $(c^2 + d^2)^{-1/2}(-c, d)$ auf $[t_1, t_3]$ und $(c^2(b-d)^2)^{-1/2}(c, b-d)$ auf $[t_2, t_3]$. Sei $u \in C^1(\bar{T})$.

1. Wir betrachten u_{x_2} . Es ist einerseits

$\alpha)$

$$\begin{aligned} \int_T u_{x_2} &= \int_0^d \int_0^{\frac{c}{d}x_1} u_{x_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 + \\ &\quad \int_d^b \int_0^{c \frac{b-x_1}{b-d}} u_{x_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^d u\left(x_1, \frac{c}{d}x_1\right) dx_1 + \int_d^b u\left(x_1, c \frac{b-x_1}{b-d}\right) dx_1 - \int_0^b u(x_1, 0) dx_1. \end{aligned}$$

Andererseits ist

β)

$$\begin{aligned} \int_{[t_1, t_2]} u \nu_2 d\sigma &= b \int_0^1 u(\lambda 0 + (1-\lambda)b, \lambda 0 + (1-\lambda)0)(-1) d\lambda \\ &= -b \int_0^1 u(sb, 0) ds = - \int_0^b u(x_1, 0) dx_1, \end{aligned}$$

was mit dem dritten Term von α) übereinstimmt.

γ)

$$\begin{aligned} \int_{[t_1, t_3]} u \nu_2 d\sigma &= \sqrt{d^2 + c^2} \int_0^1 u(\lambda 0 + (1-\lambda)d, \lambda 0 + (1-\lambda)c)(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d \cdot d\lambda \\ &= \int_0^1 u(sd, sc) d \cdot ds \\ &= \int_0^d u(x_1, \frac{c}{d}x_1) dx_1, \end{aligned}$$

welches mit dem ersten Term von α) übereinstimmt.

δ)

$$\begin{aligned} \int_{[t_2, t_3]} u \nu_2 d\sigma &= \\ &= \sqrt{c^2 + (b-d)^2} \int_0^1 u(\lambda d + (1-\lambda)b, \lambda c + (1-\lambda)0)(c^2 + (b-d)^2)^{-\frac{1}{2}}(b-d) d\lambda \\ &= \int_0^1 u(\lambda d + (1-\lambda)b, \lambda c)(b-d) d\lambda. \end{aligned}$$

Wir substituieren $x_1 = \lambda d + (1-\lambda)b = \lambda(d-b) + b$ und erhalten den zweiten Term von α). Damit ist die Aussage für $j = 2$ bewiesen.

2. Wir betrachten u_{x_1} . Es ist einerseits

$\alpha)$

$$\begin{aligned} \int_T u_{x_1} dx &= \int_0^c \int_{x_1 \frac{d}{c}}^{\frac{d-b}{c}x_2+b} u_{x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^c u\left(\frac{d-b}{c}x_2+b, x_2\right) dx_2 - \int_0^c u\left(x_2 \frac{d}{c}, x_2\right) dx_2. \end{aligned}$$

$\beta)$ Auf $[t_1, t_2]$ ist $\nu_1 = 0$.

$\gamma)$ Auf $[t_1, t_3]$ ist $\nu_1 = -c(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{[t_1, t_3]} u \nu_1 d\sigma &= \\ &= \sqrt{d^2 + c^2} \int_0^1 u(\lambda d + (1-\lambda)d, \lambda d + (1-\lambda)c)(-c)(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}} d\lambda \\ &= - \int_0^1 u(sd, sc) \cdot c ds \\ &= - \int_0^c u\left(\frac{d}{c}x_2, x_2\right) dx_2, \end{aligned}$$

was mit dem zweiten Term in $\alpha)$ übereinstimmt.

$\delta)$ Auf $[t_2, t_3]$ ist $\nu_1 = (b-d)(c^2 + (b-d)^2)^{-\frac{1}{2}}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{[t_2, t_3]} u \nu_1 d\sigma &= \\ &= (c^2 + (b-d)^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 u(\lambda d + (1-\lambda)b, \lambda c + (1-\lambda)0) \cdot c \cdot (c^2 + (b-d)^2)^{-\frac{1}{2}} d\lambda \\ &= \int_0^1 u(\lambda d + (1-\lambda)b, \lambda c) c d\lambda. \end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda c =: x_2$, so erhalten wir den ersten Term in $\alpha)$. Damit ist die Aussage für $j = 1$ bewiesen und der Beweis von a) ist vollständig.

Die Aussage b) ergibt sich aus a) wie in Korollar 7.7^{AU}. △

Aufgabe 7.6: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon und $\{T_k : k = 1, \dots, n\}$ eine zulässige Triangulierung von Ω , siehe Definition 9.24^{AU}. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$, so dass $u|_{T_k} \in C^1(T_k)$ mit beschränkten Ableitungen, $k = 1, \dots, n$.

- a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 7.5 b), dass für $j = 1, 2$ gilt:

$$-\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \sum_{k=1}^n \int_{T_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx.$$
- b) Schließen Sie aus a), dass $u \in H^1(\Omega)$ und $D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf T_k für $j = 1, 2$ und $k = 1, \dots, n$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.6:

- a) Es ist nach Aufgabe 7.5

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= -\sum_{k=1}^n \int_{T_k} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{T_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx - \int_{\partial T_k} u \varphi \nu_j d\sigma \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{T_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \end{aligned}$$

da sich die Randintegrale über Seiten der Dreiecke, die im Inneren von Ω liegen, wegen der paarweise verschiedenen Vorzeichen der äußeren Normalen wegheben. Die Randintegrale über Seiten, die den Rand von Ω bilden, verschwinden, da φ nur im Inneren von Ω lebt.

- b) Setzt man $D_j u := \frac{\partial u}{\partial x_j}$ auf $\bigcup_{k=1}^n T_k$ und $D_j u := 0$ auf $\bigcup_{k=1}^n \partial T_k$, so erhält man eine Funktion $D_j u \in L_{\infty}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Teil a) zeigt, dass $D_j u$ die schwache Ableitung von u im Sinne der Definition in Abschnitt 6.2^{AU} ist. Damit ist $u \in H^1(\Omega)$.

△

Aufgabe 7.7: (Gebiet mit stetigem Rand ohne Fortsetzungseigenschaft.)

- a) Zeigen Sie: Wenn ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, dann ist $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ für jedes $q \in [2, \infty)$. Benutzen Sie Aufgabe 6.23.
- b) Sei $\alpha > 0$, $\Omega_{\alpha} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^{\alpha}\}$. Sei $\beta > 0$, $u(x, y) := x^{-\beta}$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega_{\alpha})$, falls $\beta < \frac{\alpha-1}{2}$, aber $u \notin L_q(\Omega)$, falls q groß genug ist. Folgern Sie, dass Ω_{α} nicht die Fortsetzungseigenschaft besitzt.
- c) Sei $\alpha > 3$. Zeigen Sie, dass $u \in H^2(\Omega_{\alpha})$, falls $\beta < \frac{\alpha-3}{2}$. Folgern Sie, dass $H^2(\Omega_{\alpha}) \not\subset C(\overline{\Omega_{\alpha}})$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.7:

a) Sei $q \in [2, \infty)$. Nach Aufgabe 6.23 ist $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L_q(\mathbb{R}^2)$. Sei $E : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ ein Fortsetzungsoperator und sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann ist $Eu \in L_q(\mathbb{R}^2)$ und somit $u = (Eu)|_\Omega \in L_q(\Omega)$.

b) Sei $\beta > 0$, $u(x, y) = x^{-\beta}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha} u^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^\alpha} u(x, y)^2 dy dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha x^{-2\beta} dx < \infty \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\alpha - 2\beta + 1 > 0$; d.h. $\beta < \frac{\alpha+1}{2}$. Da $u_x = -\beta x^{-(\beta+1)}$, ist somit $u \in H^1(\Omega_\alpha)$ genau dann, wenn $\beta + 1 < \frac{\alpha+1}{2}$, also $\beta < \frac{\alpha-1}{2}$ (vgl. Bemerkung 6.13^{AU}).

Sei $q > 0$. Es ist

$$\int_{\Omega_\alpha} u^q dx dy = \int_0^1 x^\alpha x^{-q\beta} dx = \infty$$

genau dann, wenn $\alpha - q\beta + 1 \leq 0$.

c) Da $u_{xx} = \beta(\beta - 1)x^{-\beta-2}$, ist $u \in H^2(\Omega_\alpha)$ genau dann, wenn $\beta + 2 < \frac{\alpha+1}{2}$; d.h. $\beta < \frac{\alpha-3}{2}$.

△

Aufgabe 7.8: Ist $\Gamma = \{(x, \gamma(x)) : x \in [a, b]\}$ eine Kurve mit $\gamma \in C^1[a, b]$, so definiert man $\int_\Gamma f d\sigma := \int_a^b f(x, \gamma(x)) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx$ für jede Borel-messbare Funktion $f : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$. Sei $\Omega = \Omega_4$ aus Aufgabe 7.7 und sei $\Gamma := \{(x, x^4) : 0 \leq x \leq 1\}$. Somit ist Γ eine kompakte Teilmenge von $\partial\Omega$.

a) Zeigen Sie, dass $u(x, y) = \frac{1}{x}$ eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass $\int_\Gamma u^2 d\sigma = \infty$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.8:

a) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 7.7 ist $\Omega = \Omega_4$, $u(x, y) = x^{-1}$, also $\beta = 1$. Da $\beta = 1 < \frac{3}{2} = \frac{\alpha-1}{2}$, folgt aus Aufgabe 7.7 b), dass $u \in H^1(\Omega)$.

b) Für dieses u ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^2 d\sigma &= \int_0^1 u(x, x^4)^2 \sqrt{1 + (4x^3)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + (4x^3)^2} dx = \infty. \end{aligned}$$

Bemerkung: Funktionen in $H^1(\Omega)$ haben also i.A. keine Spur in $L_2(\partial\Omega)$ im Gegensatz zu Satz 7.34^{AU}, der für C^1 -Mengen gilt. \triangle

Aufgabe 7.9:

a) Sei $d = 1$, $\Omega := (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, dann besitzt Ω nicht die Fortsetzungseigenschaft.

b) Die zusammenhängende, offene Menge $\Omega := (0,1)^2 \setminus \{(1/2, y) : 0 < y < 1/2\}$ im \mathbb{R}^2 hat nicht die Fortsetzungseigenschaft, vgl. Abbildung 7.1.

Anleitung: Konstruieren Sie $u \in H^1(\Omega)$ derart, dass $u = 0$ auf $(0,1/2) \times (0,1/4)$ und $u = 1$ auf $(1/2, 1) \times (0,1/4)$. Wende das Lemma von Stampacchia, Korollar 6.36^{AU}, an.

c) Ist die Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ für die Menge Ω aus b) kompakt?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.9:

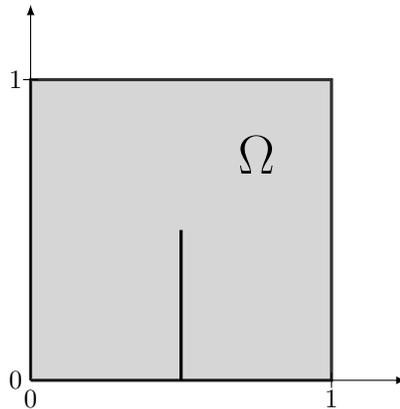


Abbildung 7.1. Menge Ω aus Aufgabe ??, die nicht die Fortsetzungseigenschaft besitzt.

a) Sei $\Omega := (0,1/2) \cup (1/2, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann ist die charakteristische Funktion $v = \mathbb{1}_{(0,1/2)}$ von der Menge $(0,1/2)$ in $H^1(\Omega)$ und es ist $v' = 0$. Sei $w \in H^1(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist $w \in C[-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$ nach Abänderung auf einer Nullmenge. Damit kann w nicht mit v fast überall übereinstimmen.

- b) Sei $\Omega = (0,1)^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, y) : 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$. Wir zeigen, dass Ω nicht die Fortsetzungseigenschaft hat. Dazu betrachten wir $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, so dass $\varphi(y) = 0$, wenn $0 \leq y \leq \frac{1}{4}$ und $\varphi(y) = 1$ für $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$. Definiere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi(y) & \text{wenn } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

für $(x, y) \in \Omega$. Angenommen, es gibt $v \in H^1(U)$, $U = (0,1) \times (0, \frac{1}{4})$, so dass $u = v$ fast überall. Da $u = 0$ auf $(0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{4})$ und $u = 1$ auf $(\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1)$, folgt aus Stampacchias Lemma, dass $\nabla v = 0$ fast überall auf U . Da U zusammenhängend ist, folgt, dass v konstant auf U ist, ein Widerspruch.

- c) Trotz der negativen Eigenschaften aus b), ist die Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ kompakt. Um das zu sehen, betrachten wir die Rechtecke $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0,1)$ und $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0,1)$. Sei $u_n \rightarrow 0$ in $H^1(\Omega)$. Wir müssen zeigen, dass $u_n \rightarrow 0$ in $L_2(\Omega)$ (vgl. Satz 4.39^{AU}). Nach Satz 7.22^{AU} oder Satz 7.27^{AU} sind die Einbettungen $H^1(\Omega_j) \hookrightarrow L_2(\Omega_j)$ kompakt, $j = 1, 2$. Da $u_n|_{\Omega_j} \rightarrow 0$ in $H^1(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, folgt, dass $\int_{\Omega_j} |u_n|^2 dx \rightarrow 0$. Da $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ eine Nullmenge ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ in $L_2(\Omega)$.

△

Aufgabe 7.10: (Beweis der Fortsetzungseigenschaft für C^1 -Gebiete.) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein C^1 -Gebiet.

- a) Sei $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Betrachten Sie die in der Beweisidee von Satz 7.19^{AU} beschriebene Fortsetzung \tilde{u} und zeigen Sie, dass $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}$ mit einer Konstanten $c > 0$, die nicht von u abhängt.
- b) Benutzen Sie eine Zerlegung der Eins, um aus a) zu folgern, dass es eine lineare, stetige Abbildung $E : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ gibt mit $(Eu)|_\Omega = u$, wobei auf $C^1(\bar{\Omega})$ die Norm von $H^1(\Omega)$ betrachtet wird.
- c) Schließen Sie daraus, dass Ω die Fortsetzungseigenschaft besitzt unter Benutzung der Tatsache, dass $C^1(\bar{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ ist (vgl. Satz 7.10^{AU}).

Bemerkung: Für einen anderen direkten Beweis, der die Dichtheit von $C^1(\bar{\Omega})$ nicht benutzt, siehe [2, Théorème IX.7].

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.10:

- a) Sei $u \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $u(x) = 0$ für $x \notin K$, wobei K kompakt ist mit $K \subset U$, $U := \{(y, g(y) + s) : |y| < r, |s| < h\}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^{d-1})$, $U \cap \Omega = U_+ = \{(y, g(y) + s) : |y| < r, 0 < s < h\}$, $U \cap \partial\Omega = \{(y, g(y)) : |y| < r\}$ und $U \setminus \bar{\Omega} = \{(y, g(y) - s) : |y| < r, 0 < s < h\} =: U_-$. Definiere $\tilde{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{u}(y, g(y) - s) := u(y, g(y) + s)$ für $|y| < r, 0 < s < h$, $\tilde{u}(x) = u(x)$ für $x \in \bar{\Omega}$ und $\tilde{u}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\bar{\Omega} \cup U)$. Wir zeigen, dass $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ und $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist, die nicht von u

abhängt. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist für $j \in \{1, \dots, d-1\}$

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= - \int_{U^+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \int_{U^-} \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{U^+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx - \int_{\partial \Omega} u \varphi \nu_j d\sigma \\ &\quad + \int_{U^-} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\partial \Omega} u \varphi \nu_j d\sigma \\ &= \int_{U^+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{U^-} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \end{aligned}$$

da die Normalen bzgl. U^+ und U^- entgegengesetztes Vorzeichen haben. Damit ist

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{U^+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{U^-} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \varphi dx.$$

Nun ist für $x = (x_1, \dots, x_d) \in U^-, \tilde{u}(x) = u(x_1, \dots, x_{d-1}, 2g(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d)$. Denn ist $x_d = g(x_1, \dots, x_{d-1}) - s$, so ist $\tilde{u}(x) = u(x_1, \dots, x_{d-1}, \tilde{x}_d)$ mit $\tilde{x}_d = g(x_1, \dots, x_{d-1}) + s = 2g(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d$. Also ist $\tilde{u}(x_1, \dots, x_d) = u(x_1, \dots, x_{d-1}, 2g(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} &= \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{d-1}, 2g(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}, 2g(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d) \\ &\quad 2 \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{d-1}), \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, d-1$, und

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_d) = - \frac{\partial u}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}, 2g(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d).$$

Damit ist $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

- b) Nun sei $\tilde{\Omega} \subset \bigcup_{j=0}^M U_j$, wobei $U_j \subset \mathbb{R}^d$ offen und für $j = 1, \dots, d$, $U_j \cap \partial \Omega$ ein C^1 -Graph bzgl. Ω ist. Sei $(\eta_j)_{j=0, \dots, M}$ eine Zerlegung der Eins, d.h. $\eta_j \in \mathcal{D}(U_j)$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\sum_{j=0}^M \eta_j(x) = 1$ für alle $x \in \tilde{\Omega}$. Sei $u \in C^1(\tilde{\Omega})$. Dann erfüllt für $j \in \{1, \dots, d\}$ die Funktion $\eta_j u$ die Voraussetzungen von a) und hat somit eine Fortsetzung $\widetilde{\eta_j u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\widetilde{\eta_j u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c_j \|\eta_j u\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{c}_j \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Damit ist $\tilde{u} := \sum_{j=0}^M \widetilde{\eta_j u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ eine Fortsetzung von u mit $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Die Abbildung $E : C^1(\tilde{\Omega}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$, $Eu := \tilde{u}$ ist also linear und stetig.

- c) Nach Satz A.3^{AU} besitzt E eine eindeutige, stetige, lineare Fortsetzung $\tilde{E} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$. Hier benutzen wir, dass $C^1(\bar{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ dicht liegt (Satz 7.27^{AU}). Sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann gibt es $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $u_n \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$. Damit ist $\tilde{E}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Eu_n$. Da die Einschränkungabbildung $v \in H^1(\mathbb{R}^d) \mapsto v|_{\Omega} \in H^1(\Omega)$ stetig ist, folgt

$$(\tilde{E}u)|_{\Omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} (Eu_n)|_{\Omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

△

8 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 8

Aufgabe 8.1: Sei $w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)e_n$, wobei w_n durch (8.32^{AU}) gegeben ist. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass $a(w(t)) + \|\dot{w}(t)\|_H^2 = a(u_0) + \|u_1\|_H^2$ für alle $t \geq 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.1: Es ist

$$a(w(t)) + \|\dot{w}(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_n(t)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t)^2$$

und

$$a(u_0) + \|u_1\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n (u_0, e_n)_H^2 + (u_1, e_n)_H^2).$$

Daher muss man zeigen, dass

$$\lambda_n w_n(t)^2 + \dot{w}_n(t)^2 = \lambda_n (u_0, e_n)_H^2 + (u_1, e_n)_H^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\lambda_n > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_n w_n(t)^2 &= \lambda_n \cos^2(\sqrt{\lambda_n} t) (u_0, e_n)_H^2 + 2\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) (u_0, e_n)_H \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n} t) (u_1, e_n)_H \\ &\quad + \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t) (u_1, e_n)_H^2 \end{aligned}$$

und

$$\dot{w}_n(t) = -\sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) (u_0, e_n)_H + \cos(\sqrt{\lambda_n} t) (u_1, e_n)_H$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{w}_n(t)^2 &= \lambda_n \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t) (u_0, e_n)_H^2 - 2\sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) (u_0, e_n)_H \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} t) (u_1, e_n)_H \\ &\quad + \cos^2(\sqrt{\lambda_n} t) (u_1, e_n)_H^2. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lambda_n w_n(t)^2 + \dot{w}_n(t)^2 = \lambda_n (u_0, e_n)_H^2 + (u_1, e_n)_H^2,$$

was zu zeigen war.

Ist $\lambda_n = 0$, so gilt Formel (8.33^{AU}). Somit ist $\dot{w}_n(t) = (u_1, e_n)_H$. Folglich ist

$$\lambda_n w_n(t)^2 + \dot{w}_n(t)^2 = 0 + (u_1, e_n)_H^2,$$

was zu zeigen war. △

Aufgabe 8.2: (Getrennte Variablen.) Sei A ein Operator auf einem reellen Hilbert-Raum H und sei $f \in D(A)$, $f \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass es genau dann eine Lösung von $\dot{u}(t) = Au(t)$, $t \in (0, T)$ der Form $u(t) = v(t)f$ mit $v \in C^1(0, T)$, $v \neq 0$ gibt, wenn f ein Eigenvektor von A ist.

b) Man beantworte die gleiche Frage für die Gleichung $\ddot{u}(t) = Au(t)$, $t \in (0, T)$, wobei nun vorausgesetzt wird, dass $v \in C^2(0, T)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.2:

a) Sei $u(t) = v(t)f$ eine Lösung, d.h. $\dot{u}(t) = Au(t)$, $t \in (0, T)$. Dann ist $\dot{v}(t)f = v(t)Af$. Wenn $v(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (0, T)$, dann ist $Af = \lambda f$ mit $\lambda = \frac{\dot{v}(t_0)}{v(t_0)}$. Ist umgekehrt $Af = \lambda f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so definiert $u(t) = e^{\lambda t}f$ eine Lösung.

b) Sei $u(t) = v(t)f$ mit $v \in C^2(0, T)$. Ist $\ddot{u}(t) = Au(t)$, so folgt, dass $\ddot{v}(t)f = v(t)Af$. Ist $v(t_0) \neq 0$, so ist $Af = \lambda f$ mit $\lambda = \frac{\ddot{v}(t_0)}{v(t_0)}$. Gilt umgekehrt $Af = \lambda f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so wählen wir

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= at + b \text{ wenn } \lambda = 0, \\ \varphi(t) &= \cosh \sqrt{\lambda} t \text{ wenn } \lambda > 0, \\ \varphi(t) &= \cos \sqrt{-\lambda} t \text{ wenn } \lambda < 0, \\ u(t) &= \varphi(t)f.\end{aligned}$$

Dann gilt $\ddot{u} = Au$. △

Aufgabe 8.3: Sei Ω ein beschränktes C^1 -Gebiet und sei $b : \partial\Omega \rightarrow [0, \infty)$ Borel-messbar und beschränkt. Sei $u_0 \in H^1(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega)$, so dass $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(z)(Tu)(z) = 0$, und sei $u_1 \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $w \in C^2(\mathbb{R}_+, L_2(\Omega))$, so dass $w(t) \in H^1(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega)$, $\Delta w(t) \in L_2(\Omega)$, $t \geq 0$ und

$$\begin{aligned}\ddot{w}(t) &= \Delta w(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} + bT(w(t)) &= 0, \\ w(0) &= u_0, \quad \dot{w}(0) = u_1.\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.3: Wir benutzen Satz 8.15^{AU} zur Lösung der Aufgabe. Dazu wählen wir für A den Laplace-Operator mit Robin-Randbedingungen auf $H = L_2(\Omega)$, vgl. Abschnitt 8.3^{AU} für die Wärmeleitungsgleichung. Wir wählen $V = H^1(\Omega)$, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} bTuTv \, d\sigma,$$

wobei $T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ der Spuroperator aus Satz 7.34^{AU} ist. Es ist V kompakt in $L_2(\Omega)$ eingebettet und die Form a ist stetig und $L_2(\Omega)$ -elliptisch. Sei A der assoziierte Operator auf $L_2(\Omega)$. Nach Satz 8.12^{AU} ist

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in H^1(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^2(\Omega) : \Delta u \in L_2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \nu} + b(TK) = 0\} \\ Au &= -\Delta u. \end{aligned}$$

Wir setzen $\Delta^2 = -A$. Es gibt eine Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $L_2(\Omega)$ mit $e_n \in D(\Delta^b)$ und

$$-\Delta^b e_n = \lambda_n^b e_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei $\lambda_N^b \leq \lambda_{N+1}^b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^b = \infty$.

Sei $u_0 \in D(A)$ und $u_1 \in H^1(\Omega) = V$. Nach Satz 8.15^{AU} gibt es eine eindeutige Funktion $w \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, so dass $w(t) \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ und

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) + Aw(t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ w(0) &= u_0, \quad \dot{w}(0) = u_1. \end{aligned}$$

△

Aufgabe 8.4: Sei $b : \partial\Omega \rightarrow [0, \infty)$ beschränkt und Borel-messbar. Zeigen Sie, dass $\lambda_n^b \leq \lambda_n^D$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.4: Sei $b : \partial\Omega \rightarrow [0, \infty)$ beschränkt und Borel-messbar. Der n -te Eigenwert λ_n^D von $-\Delta^D$ ist nach Satz 4.50^{AU} gegeben durch

$$\lambda_n^D = \max_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ \text{codim } W \leq n-1}} \min_{\substack{u \in W \\ \|u\|_{L_2} = 1}} a(u),$$

wobei $a(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$, während der n -te Eigenwert λ_n^b von $-\Delta^b$ gegeben ist durch

$$\lambda_n^b = \max_{\substack{V \subset H^1(\Omega) \\ \text{codim } V \leq n-1}} \min_{\substack{u \in V \\ \|u\|_{L_2} = 1}} a^b(u)$$

mit $a^b(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} b(z)|u|^2 \, d\sigma(z)$. Sei $V \subset H^1(\Omega)$ ein Unterraum mit $\text{codim } V \leq n-1$ bzgl. $H^1(\Omega)$. Das bedeutet, dass $V \cap V_1 \neq \{0\}$ falls V_1 ein Unterraum von $H^1(\Omega)$ ist mit $\dim V_1 \geq n$. Betrachte $V_0 := V \cap H_0^1(\Omega)$. Dann hat V_0 bzgl. $H_0^1(\Omega)$ die Codimension $\leq n-1$. Sei nämlich $V_2 \subset H_0^1(\Omega)$ ein Unterraum mit $\dim V_2 \geq n$. Dann ist nach Voraussetzung $V_2 \cap V \neq \{0\}$. Da $V_2 \subset H_0^1(\Omega)$, ist

also auch $V_2 \cap V_0 \neq \{0\}$. Wir haben gezeigt, dass $\text{codim } V_0 \leq n - 1$ in $H_0^1(\Omega)$. Nun wählen wir den Unterraum V so, dass

$$\lambda_n^b = \min_{\substack{u \in V \\ \|u\|_{H=1}}} a^b(u)$$

(siehe Satz 4.50^{AU}). Da für $u \in V_0$, $a(u) = a^b(u)$ ist also $\lambda_n^b \leq \min_{\substack{u \in V_0 \\ \|u\|_{H=1}}} a(u)$ (wir minimieren über eine kleinere Menge). Nun folgt aus (4.30^{AU}), dass

$$\lambda_n^b = \max_{\substack{W \subset H_0^1 \\ \text{codim } V \leq n-1}} \min_{\substack{u \in W \\ \|u\|_{H=1}}} a(u) = \lambda_n^D.$$

△

Aufgabe 8.5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, H ein separabler Hilbert-Raum.

- Sei $u \in L_1(I, H)$. Zeigen Sie, dass es genau ein Element $\int_I u(t) dt$ von H gibt derart, dass $\int_I (u(t), v)_H dt = \left(\int_I u(t) dt, v\right)_H$ für alle $v \in H$.
- Zeigen Sie, dass $\left\| \int_I u(t) dt \right\|_H \leq \int_I \|u(t)\|_H dt$.
- Zeigen Sie, dass $L_1(I, H)$ ein Vektorraum ist und dass die Abbildung $u \mapsto \int_I u(t) dt : L_1(I, H) \rightarrow H$ linear ist.
- Falls $0 < T < \infty$, so ist $L_2(0, T; H) \subset L_1(0, T; H)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und H ein separabler Hilbert-Raum. Die Behauptungen a) und b) bilden die Aussage von Lemma 8.22^{AU}, die wir jetzt beweisen wollen. Sei $f \in L_1(I, H)$; d.h. $f : I \rightarrow H$ ist messbar und $\int_I \|f(t)\| dt < \infty$. Sei $v \in H$. Dann ist

$$\int_I |(f(t)(v))| dt \leq \int_I \|f(t)\| dt \|v\|$$

nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Damit definiert $\varphi(v) := \int_I (f(t)(v)) dt$ eine stetige Linearform auf H und es ist $\|\varphi\| \leq \int_I \|f(t)\| dt$. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $w \in H$, so dass

$$\varphi(v) = (w, v)_H$$

für alle $v \in H$. Ferner ist

$$\|w\| = \|\varphi\| \leq \int_I \|f(t)\| dt.$$

Damit sind a) und b) bewiesen, wenn wir $w := \int_I f(t) dt$ setzen.

c) Seien $f, g \in L_1(I, H)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $t \mapsto (\alpha f(t) + \beta g(t), v) = \alpha(f(t), v) + \beta(g(t), v)$ für jedes $v \in H$ messbar und

$$\int_I \|\alpha f(t) + \beta g(t)\| dt \leq \int_I \|\alpha f(t)\| dt + \int_I \|\beta g(t)\| dt.$$

Somit ist $L_1(I, H)$ ein Vektorraum. Es gilt für $v \in H$:

$$\begin{aligned} \left(\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt, v \right)_H &= \\ \int_I (\alpha f(t) + \beta g(t), v)_H dt &= \\ \int_I \{\alpha(f(t), v) + \beta(g(t), v)\}_H dt &= \\ \alpha \int_I (f(t), v)_H dt + \beta \int_I (g(t), v)_H dt &= \\ \left(\alpha \int_I f(t) dt + \beta \int_I g(t) dt, v \right). \end{aligned}$$

Da $v \in H$ beliebig ist, folgt, dass

$$\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_I f(t) dt + \beta \int_I g(t) dt.$$

Bemerkung: $L^1(I, H)$ ist ein Banach-Raum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{L^1} := \int_I \|f(t)\| dt.$$

d) Sei $0 < T < \infty$. Sei $f \in L_2(0, T; H)$. Dann ist

$$\int_0^T \|f(t)\| dt \leq \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}},$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung angewandt haben. Somit ist $f \in L_1(0, T; H)$.

△

Aufgabe 8.6: Seien H_1, H_2 separable Hilbert-Räume und sei $B : H_1 \rightarrow H_2$ stetig und linear. Zeigen Sie, dass $u \mapsto B \circ u$ eine stetige lineare Abbildung von $L_2(0, T; H_1)$ nach $L_2(0, T; H_2)$ definiert, $0 < T \leq \infty$. Die Abbildung ist unitär, falls B unitär ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.6:

- a) Sei $u \in L^2(0, T, H_1)$. Sei $v \in H_2$. Dann ist $(B(u(t), v))_{H_2} = (u(t), B^*v)_{H_1}$. Da $B^*v \in H_1$, ist $(u(\cdot), B^*v)_{H_1}$ nach Voraussetzung messbar. Ferner ist $\|Bu(t)\|_{H_2} \leq \|B\| \|u(t)\|_{H_1}$. Damit ist

$$\int_0^T \|Bu(t)\|_{H_2}^2 dt \leq \|B\|^2 \int_0^T \|u(t)\|_{H_1}^2 dt < \infty.$$

Wir haben gezeigt, dass $B \circ u \in L^2(0, T; H_2)$. Die Abbildung $S : u \mapsto B \circ u$ ist linear und $\|Su\|_{H_2} = \left(\int_0^T \|Bu(t)\|_{H_2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|B\| \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H_1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Damit ist S stetig und $\|S\| \leq \|B\|$. Sei B unitär. Dann ist für $u, v \in L_2(0, T, H_2)$:

$$\begin{aligned} (Su, Sv)_{L_2} &= \int_0^T (Bu(t), Bv(t))_{H_2} dt \\ &= \int_0^T (u(t), v(t))_{H_1} dt \\ &= (u, v)_{L_2(0, T; H_1)}. \end{aligned}$$

Da S invertierbar ist mit $S^{-1}u = B^{-1} \circ u$ ist S unitär.

△

Aufgabe 8.7: Sei H ein separabler Hilbert-Raum und sei $0 < T \leq \infty$.

- a) Sei $u \in H^1(0, T; H)$ derart, dass $\dot{u}(t) = 0$ fast überall. Zeigen Sie, dass es $x \in H$ gibt derart, dass $u(t) = x$ für fast alle $t \in (0, T)$.

Hinweis: Benutzen Sie das skalare Resultat in Lemma 5.7^{AU}.

- b) Sei $v \in L_2(0, T; H)$ und $x_0 \in H$. Definieren Sie $u : (0, T) \rightarrow H$ durch $u(t) = x_0 + \int_0^t v(s) ds$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(0, T; H)$ und $u' = v$. Zeigen Sie auch, dass $u \in C([0, T]; H)$, wenn $T < \infty$.

- c) Sei $u \in H^1(0, T; H)$. Zeigen Sie, dass $u \in C([0, T]; H)$ und $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$ für $t \in (0, T)$.

- d) Sei $u \in H^1(0, T; H)$ mit $\dot{u} \in C([0, T]; H)$. Zeigen Sie, dass $u \in C^1([0, T]; H)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.7:

- a) Sei $u \in H^1(0, T; H)$ derart, dass $\dot{u}(t) = 0$ fast überall. Sei $v \in H$. Dann ist für $\varphi \in C_c^1(0, T)$,

$$-\int_0^T (u(t), v)_H \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^T (\dot{u}(t), v)_H \varphi(t) dt,$$

d.h. (\dot{u}, v) ist die schwache Ableitung von (u, v) . Da $\dot{u} = 0$ fast überall, gibt es zu jedem $v \in H$ genau ein $\varphi_v \in \mathbb{R}$, so dass

$$(u(t), v)_H = \varphi_v \text{ fast überall.}$$

Die Abbildung $v \mapsto \varphi_v : H \rightarrow \mathbb{R}$ ist wegen der Eindeutigkeit linear. Sie ist stetig, da

$$|T\varphi_v| = \left| \int_0^T (u(t), v) dt \right| \leq \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $w \in H$, so dass $\varphi_v = (w, v)_H$ für alle $v \in H$. Damit ist $(u(t), v)_H = (w, v)_H$ fast überall für alle $v \in H$. Sei $M := \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H . Es gibt Nullmengen N_n , so dass $(u(t) - w, v_n)_H = 0$ für $t \notin I \setminus N_n$. Folglich ist $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ eine Nullmenge, so dass $(u(t) - w, v_n) = 0$ für $t \in I \setminus N$. Wir können $u(t) - w$ durch Elemente aus der Menge M approximieren. Damit ist $\|u(t) - w\| = 0$ für $t \in I \setminus N$. Es ist also $u(t) = w$ für alle $t \in I \setminus N$.

- b) Sei $v \in L^2(0, T; H)$, $x_0 \in H$, $u(t) = x_0 + \int_0^t v(s) ds$. Es folgt aus Satz 5.9^{AU}, dass für $w \in H$, $\varphi \in C_c^1(0, T)$

$$-\int_0^T (u(t), w) \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^T (v(t), w) \varphi(t) dt.$$

Da $w \in H$ beliebig ist, folgt, dass $-\dot{u} = v$. Bleibt zu zeigen, dass u stetig ist. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u(t)\| &= \left\| \int_{t_n}^t v(s) ds \right\| \\ &\leq |t_n - t|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_n}^t \|v(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |t_n - t|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(0, T; H)}. \end{aligned}$$

Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = u(t)$ in H .

- c) Der Beweis ist identisch mit dem Beweis von Satz 5.9^{AU} b).
 d) Das ist klar.

△

Aufgabe 8.8: Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raumes und $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit $0 \leq \lambda_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Definieren Sie für $t \geq 0$, $T(t) : H \rightarrow H$ durch $T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (x|e_n) e_n$. Zeigen Sie:

- a) $T(t) \in \mathcal{L}(H)$, $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$, $T(0) = I$, $\lim_{h \rightarrow 0} T(t+h)x = T(t)x$ für alle $x \in H$. (Beachten Sie den Beweis von Satz 8.3^{AU} für die letzte Eigenschaft.)
 b) Zeigen Sie, dass für $x \in H$, $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) =: Bx$ genau dann existiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (x|e_n)^2 < \infty$. Anleitung: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (x|e_n)^2 < \infty$. Setzen Sie $y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n$. Zeigen Sie, dass $T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.8:

- a) Die Linearität von $T(t)$ ist unmittelbar klar. Für $x \in H$ ist

$$\begin{aligned} \|T(t)x\|_H^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n 2t} |(x, e_n)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\|T(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$. Es ist $T(t)e_m = e^{-\lambda_m t} e_m$. Damit ist

$$\begin{aligned} T(s)T(t)e_m &= T(s)e^{-\lambda_m t} e_m = e^{-\lambda_m t} e^{-\lambda_m s} e_m \\ &= T(t+s)e_m. \end{aligned}$$

Da die Menge $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ in H total ist, folgt, dass $T(s)T(t) = T(s+t)$. Im Beweis von Satz 8.3^{AU} wird bewiesen, dass $\lim_{h \rightarrow 0} T(t+h)x = T(t)x$ für alle $t \geq 0$, $x \in H$.

- b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (x, e_n)^2 < \infty$. Dann ist $y := -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \in H$. Es ist $\left(\int_0^t T(s)y ds, e_m\right)_H = \int_0^t (T(s)y, e_m) ds = -\int_0^t \lambda_m (x, e_m) e^{-\lambda_m s} ds = (x, e_m)(e^{-\lambda_m t} - 1) = (T(t)x - x, e_m)$. Da m beliebig ist, folgt, dass $T(t)x - x = y$. Damit ist $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds = T(0)y = y$. Damit ist eine Richtung bewiesen. Um die andere zu zeigen, nehmen wir $x \in H$, so dass $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) =: Bx$ existiert. Damit ist

$$\begin{aligned} (Bx, e_n) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (e^{-t\lambda_n} - 1)(x, e_n) \\ &= -\lambda_n (x, e_n). \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2(x, e_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (Bx, e_n)^2 = \|Bx\|^2$.

△

Aufgabe 8.9: Sei H ein separabler Hilbert-Raum, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $f \in L_2(0, T; H)$, $x_0 \in H$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Funktion $u \in H^1(0, T; H)$ derart, dass $\dot{u}(t) + \lambda u(t) = f(t)$ fast überall auf $(0, T)$, $u(0) = x_0$. Sie ist gegeben durch $u(t) = e^{-\lambda t} \{x_0 + \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.9: Man kann diese Aufgabe genau wie Aufgabe 5.10 lösen.

△

9 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 9

Aufgabe 9.1: Es sei f_α wie in (9.15^{AU}) und $u_\alpha \in C^1[0,1]$ die Lösung von $Lu_\alpha = f_\alpha$ gemäß (9.1^{AU}). Definieren Sie L_h mittels des zentralen Differenzenquotienten auf einem äquidistanten Gitter. Zeigen Sie, dass für die Lösung $u_{\alpha,h}$ von $L_h u_{\alpha,h} = f_\alpha$ gilt, dass $\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_{h,\infty} = \mathcal{O}(h)$ mit $h \rightarrow 0+$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.1: Offenbar müssen wir die Differenzialgleichung stückweise interpretieren. Man rechnet leicht nach, dass

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x(\frac{1}{2} - 2\alpha - \alpha^2), & 0 \leq x \leq \alpha, \\ -\frac{1}{2}x^2 + x(\frac{1}{2} - \alpha^2) + \alpha^2, & \alpha < x \leq 1, \end{cases}$$

die Lösung des Randwertproblems ist. Wegen

$$\|u_\alpha^{(4)}\|_{\infty,(h,\alpha-h)} = \|u_\alpha^{(4)}\|_{\infty,(\alpha+h,1-h)} = 0$$

gilt $u_\alpha''(x) = \Delta_h u_\alpha(x)$ für $x \in (h, \alpha - h) \cup (\alpha + h, 1 - h)$. Daraus folgt, dass $u_{\alpha,h} = u_\alpha$ falls α ein Gitterpunkt ist, d.h. $\alpha = kh$ mit einem $1 \leq k \leq N$. Sei also α kein Gitterpunkt, dann existiert ein $1 \leq k \leq N + 1$ mit

$$\bar{\alpha} - h = (k - 1)h < \alpha < kh =: \bar{\alpha}.$$

Insbesondere gilt $\bar{\alpha} - \alpha < h$. Man beachte, dass $\bar{\alpha}$ ein Gitterpunkt ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_\infty &\leq \|u_\alpha - u_{\bar{\alpha}}\|_\infty + \|u_{\bar{\alpha}} - u_{\bar{\alpha},h}\|_\infty + \|u_{\bar{\alpha},h} - u_{\alpha,h}\|_\infty \\ &= \|u_\alpha - u_{\bar{\alpha}}\|_\infty + \|u_{\bar{\alpha},h} - u_{\alpha,h}\|_\infty. \end{aligned}$$

Nun betrachtet man die Differenzialgleichung stückweise auf $[0,1] = [0, \alpha) \cup [\alpha, \bar{\alpha}) \cup [\bar{\alpha}, 1]$ und zeigt mittels $\bar{\alpha} - \alpha < h$ die Abschätzungen $\|u_\alpha - u_{\bar{\alpha}}\|_\infty, \|u_{\bar{\alpha},h} - u_{\alpha,h}\|_\infty = \mathcal{O}(h), h \rightarrow 0+$. \triangle

Aufgabe 9.2: Für $x_i := ih, h = \frac{1}{N+1}, 0 \leq i \leq N + 1$, zeige man (9.12^{AU}), d.h. $\sum_{k=1}^N G(x_i, x_k) = \frac{1}{2h} x_i(1 - x_i)$ mit der Green'schen Funktion G aus (9.3^{AU}).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.2: Aufgrund der Definition der Green'schen

Funktion gilt.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N G(x_i, x_k) &= \sum_{k=1}^i G(x_i, x_k) + \sum_{k=i+1}^N G(x_i, x_k) \\
 &= \sum_{k=1}^i x_k(1 - x_i) + \sum_{k=i+1}^N x_i(1 - x_k) \\
 &= \sum_{k=1}^i x_k - x_i \sum_{k=1}^i x_k + \sum_{k=i+1}^N x_i - x_i \sum_{k=i+1}^N x_k \\
 &= \sum_{k=1}^i x_k - x_i + \sum_{k=1}^N x_k + x_i(N - i).
 \end{aligned}$$

Nun verwenden wir $x_i = ih$ und $h = \frac{1}{N+1}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N G(x_i, x_k) &= h \sum_{k=1}^i k - x_i h \sum_{k=1}^N k + x_i(N - i) \\
 &= h \frac{i(i+1)}{2} - x_i h \frac{N(N+1)}{2} + x_i(N - i) \\
 &= \frac{x_i}{2} [i+1 - N + 2(N - i)] \\
 &= \frac{x_i}{2} [N - i + 1] = \frac{x_i}{2h} [N - i + 1]h \\
 &= \frac{1}{2h} x_i(1 - x_i),
 \end{aligned}$$

da $1 - x_i = (N + 1 - i)h$. △

Aufgabe 9.3: Zeigen Sie, dass die Steifigkeitsmatrix des Dirichlet-Problems in einer Raumdimension identisch mit der Systemmatrix der FDM mit zentralen Differenzenquotienten ist. In beiden Fällen sei das Gitter äquidistant.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.3: Die i -te FE-Basisfunktion ϕ_i lautet

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & \text{falls } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx$, $u, v \in H_0^1(0,1)$, sehen wir sofort, dass $a(\phi_i, \phi_j) = 0$, falls $|i - j| > 1$, da in diesem Fall $|\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j| = 0$.

Für $i = j$ gilt

$$a(\phi_i, \phi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{2}{h}.$$

Für $|i - j| = 1$ gilt zunächst $a(\phi_i, \phi_j) = a(\phi_j, \phi_i)$ und für $i = 2, \dots, N - 1$ gilt

$$a(\phi_i, \phi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} \right) dx = -\frac{1}{h},$$

wir erhalten also genau die gleiche Tridiagonalmatrix wie bei der FDM. \triangle

Aufgabe 9.4: Sei T ein Dreieck mit Eckpunkten t_1, t_2, t_3 . Zeigen Sie, dass es zu jedem $i \in \{1, 2, 3\}$ genau ein $v_i \in \mathcal{P}_1(T)$ gibt mit $v_i(t_j) = \delta_{i,j}$, $j = 1, 2, 3$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.4: Wir zeigen die Behauptung für $i = 1$, für $i = 2, 3$ geht man analog vor. Dann hat $v_i \in \mathcal{P}_1(T)$ die eindeutige Darstellung

$$v_1(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y.$$

Mit $t_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$v_1(t_i) = c_0 + c_1 x_i + c_2 y_i = \delta_{1,i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

also

$$Ac = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wegen $\det(A) = 2|T|$ ist A regulär genau dann, wenn $|T| \neq 0$. Damit ist alles gezeigt. \triangle

Aufgabe 9.5: Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(t) = -\frac{1}{y(t)} \sqrt{1 - y(t)^2}$, $y(0) = 1$ mit der Lösung $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $0 \leq t < 1$. Warum liefert das explizite Euler-Verfahren unabhängig von der Schrittweite die Lösung $y \equiv 1$?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.5: Das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $\Delta t > 0$ liefert

$$y_h(t + \Delta t) = y_h(t) - \frac{\Delta t}{y_h(t)} \sqrt{1 - y_h(t)^2}.$$

Für $t = 0$ erhalten wir also mit $y_h(0) = y(0) = 1$

$$y_h(\Delta t) = y_h(0) - \frac{\Delta t}{y_h(0)} \sqrt{1 - y_h(0)^2} = 1.$$

Induktiv folgt dann $y_h(n\Delta t) = 1$ für alle $n > 0$. Dies liegt daran, dass die rechte Seite der Differenzialgleichung für $t = 0$ aufgrund der Anfangsbedingung verschwindet. \triangle

Aufgabe 9.6: Sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ und $\mathcal{P} := \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_p(\Omega)$, wobei $\mathcal{P}_p(\Omega)$ den Raum der Polynome auf Ω mit maximalem Grad $p \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Man zeige, dass \mathcal{P} ein normierter Raum unter $\|\cdot\|_\infty$, aber kein Banach-Raum ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.6: Es ist klar, dass \mathcal{P} ein linearer Raum ist. Ebenso ist klar, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf \mathcal{P} ist. Wir zeigen, dass \mathcal{P} unter $\|\cdot\|_\infty$ nicht vollständig ist. Mit

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{\ell(x)^k}{k!}, \quad x \in \Omega, \quad \ell(x) := \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right),$$

definieren wir eine Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$. Es handelt sich um eine Cauchy-Folge: Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$

$$P_n(x) - P_m(x) = \sum_{k=m+1}^n \frac{\ell(x)^k}{k!},$$

also

$$\|P_n - P_m\|_\infty \leq \frac{1}{(m+1)!} \sup_{x \in \Omega} \sum_{k=m+1}^n |\ell(x)|^k \leq \frac{n-m+1}{(m+1)!},$$

da $|\ell(x)| < 1$ für alle $x \in (a, b)$. Damit gilt $\|P_n - P_m\|_\infty \rightarrow 0$ mit $m, n \rightarrow \infty$, also ist $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da aber $P_n(x) \rightarrow e^{\ell(x)} \notin \mathcal{P}$, ist \mathcal{P} nicht vollständig. \triangle

Aufgabe 9.7: Man betrachte eine Variante i_h der Clément-Interpolierenden von $L_1(\Omega)$ in den Raum der linearen Finiten Elemente $V_h = X_h^{1,0}$ (ohne homogene Dirichlet-Randbedingungen) auf quasi-uniformen Gittern $\{\mathcal{T}_h\}$, die wie folgt definiert ist. Für jeden Knoten t_i betrachten wir ein Funktional $\pi_i : L_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\pi_i(u) = \left(\int_{\omega_i} u \phi_i dx \right) \left(\int_{\omega_i} \phi_i dx \right)^{-1},$$

mit der Knotenbasisfunktion ϕ_i und $\omega_i := \text{supp } \phi_i$. Die Interpolierende wird dann als $i_h u = \sum_{x_i \in \mathcal{N}(\mathcal{T}_h)} \pi_i(u) \phi_i$ definiert, wobei $\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)$ die Menge der Knoten von \mathcal{T}_h bezeichnet. Man beweise folgende Abschätzungen:

- (a) Aus $u \geq 0$ folgt $i_h u \geq 0$.
- (b) $\|u - \pi_i(u)\|_{L_2(\omega_i)} \leq ch_i \|\nabla\|_{L_2(\omega_i)}$ mit $h_i = \max_{T \subset \omega_i} h_T$.
- (c) $\|u - i_h u\|_{L_2(T)} \leq ch \|\nabla u\|_{L_2(\tilde{\omega}_T)}$ mit $\tilde{\omega}_T := \bigcup \{\kappa \in \mathcal{T}_h : \bar{\kappa} \cap \bar{T} \neq \emptyset\}$.
- (d) $\|u - i_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq ch \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$.
- (e) $\|u - i_h u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq ch^2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$, wobei der Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ von $H_0^1(\Omega)$ mit der Norm $\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{(v, \phi)}{\|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega)}}$ versehen ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.7:

- (a) Da $\phi_i \geq 0$, folgt $\int_{\omega_i} u \phi_i dx \geq 0$, falls $u \geq 0$. Daraus folgt $i_h \geq 0$.

(b) Sei t_i zunächst ein Randknoten, d.h. $t_i \in \Gamma$, dann gilt wegen $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u - \pi_i(u)\|_{L_2(\omega_i)} = \|u\|_{L_2(\omega_i)} \leq ch_i \|\nabla u\|_{L_2(\omega_i)}$$

mit der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung. Nun sei $t_i \in \Omega$ ein innerer Knoten. Mit

$$\underset{\omega_i}{f} u \, dx := \frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} u \, dx$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \|u - \pi_i(u)\|_{L_2(\omega_i)} &\leq \left\| u - \underset{\omega_i}{f} u \, dx \right\|_{L_2(\omega_i)} + \left\| \pi_i \left(u - \underset{\omega_i}{f} u \, dx \right) \right\|_{L_2(\omega_i)} \\ &\leq ch_i \|\nabla u\|_{L_2(\omega_i)} \end{aligned}$$

wiederum mit der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \|u - i_h u\|_{L_2(T)} &= \left\| u - \sum_{t_i \in \bar{T}} \pi_i(u) \phi_i \right\|_{L_2(T)} \leq \sum_{t_i \in \bar{T}} \|u - \pi_i(u) \phi_i\|_{L_2(T)} \\ &\leq c \sum_{t_i \in \bar{T}} h_i \|\nabla u\|_{L_2(\omega_i)} \leq ch \|\nabla u\|_{L_2(\tilde{\omega}_T)}. \end{aligned}$$

(d) Die Anzahl der Dreiecke in $\tilde{\omega}_T$ ist für $T \in \mathcal{R}_h$ gleichmäßig beschränkt, also folgt die Behauptung durch Summation.

(e) Für $u, v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} (u, i_h v)_{L_2(\Omega)} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (u, i_h v)_{L_2(T)} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{x_i \in \mathcal{N}(T_h)} \pi_i(v)(u, \phi_i)_{L_2(T)} \\ &= \sum_{x_i \in \mathcal{N}(T_h)} \pi_i(v)(u, \phi_i)_{L_2(\omega_i)} = \sum_{x_i \in \mathcal{N}(T_h)} \pi_i(v) \pi_i(u) \int_{\omega_i} \phi_i \, dx \\ &= \sum_{x_i \in \mathcal{N}(T_h)} \pi_i(u)(v, \phi_i)_{L_2(\omega_i)} = (i_h u, i_h v)_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

also $(u - i_h u, i_h v)_{L_2(\Omega)} = 0$ für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|u - i_h u\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{(u - i_h u, \phi)_{L_2(\Omega)}}{\|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega)}} \\ &= \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{(u - i_h u, \phi - i_h \phi)_{L_2(\Omega)}}{\|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega)}} \\ &\leq \|u - i_h u\|_{L_2(\Omega)} \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\|\phi - i_h \phi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega)}} \\ &\leq ch^2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

△

Aufgabe 9.8: Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Parallelogramm. Man beweise, dass es eine affine Transformation $\sigma : \hat{T} = (0,1)^2 \rightarrow T$ gibt. Wie sieht die Transformation von \hat{T} auf ein allgemeines Viereck aus?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.8: Angenommen, T habe die Ecken P_i mit den Koordinaten (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 4$. Weiter gilt für ein Parallelogramm

$$\vec{a} := \overrightarrow{P_1 P_4} = \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \end{pmatrix} \parallel \overrightarrow{P_2 P_3}, \quad \vec{b} := \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \parallel \overrightarrow{P_4 P_3}.$$

Wir wählen \vec{a} und \vec{b} als Spalten einer Matrix A , also

$$A := (\vec{b}, \vec{a}) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$$

und setzen $\sigma \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ für $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{T} = (0,1)^2$. Offensichtlich gilt

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1, \quad \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P_4, \quad \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_2, \quad \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_3$$

und $\sigma(\hat{T}) = T$, also das gesuchte $\sigma : \hat{T} \rightarrow T$.

Für ein allgemeines Viereck kann man keine affin-lineare Transformation konstruieren. Die Transformation ergibt sich aus der Betrachtung je eines Gitters auf \hat{T} bzw. T , vgl. Abbildung 9.1.

Die Abbildung lautet

$$\begin{aligned} \sigma \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} &= \vec{P}_1 + \hat{x}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) + \hat{y}[\vec{P}_4 + \hat{x}(\vec{P}_3 - \vec{P}_4) - \vec{P}_1 - \hat{x}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)] \\ &= \vec{P}_1 + \hat{x}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) + \hat{y}(\vec{P}_4 - \vec{P}_1) + \hat{x}\hat{y}(\vec{P}_3 - \vec{P}_4 - \vec{P}_2 + \vec{P}_1). \end{aligned}$$

Wegen des gemischten Terms $\hat{x}\hat{y}$ ist $\sigma \notin \mathcal{P}_1$. Dieser verschwindet genau dann, wenn $\overrightarrow{P_1 P_2} \parallel \overrightarrow{P_3 P_4}$. △

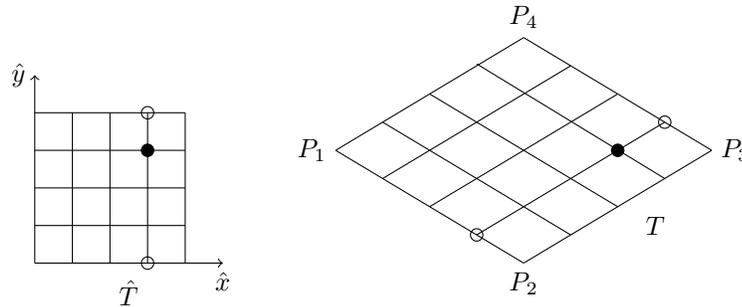


Abbildung 9.1. Gitter auf \hat{T} und T .

Aufgabe 9.9: Gegeben sei folgende Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) &= a, & u(1) = b, \end{aligned}$$

mit vorgegebenen Konstanten a und b sowie einer stetigen Funktion $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Durch Diskretisierung mittels zentraler Finiter Differenzen mit uniformer Gitterweite $h = 1/(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$, erhält man das lineare Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ wie in (9.8^{AU}).

Zeigen Sie: Die Eigenwerte von A_h sind gegeben durch $\lambda_j = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right)$ mit den zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $v_j = \sqrt{2h}[\sin(ij\pi h)]_{i=1}^N$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.9: Die Diskretisierung lautet

$$\begin{aligned} u_0 &= a, & u_{N+1} &= b \\ -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} &= h^2 f_i, & 1 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

also ist die Matrix A_h dieselbe Tridiagonalmatrix wie für homogene Dirichlet-Randbedingungen, also Diagonalelemente 2 und Nebendiagonaleinträge -1 (jeweils multipliziert mit $\frac{1}{h^2}$). Damit gilt

$$\begin{aligned} h^2(A_h v_j)_i &= -(v_j)_{i-1} + 2(v_j)_i - (v_j)_{i+1} \\ &= \sqrt{2h}\{-\sin((i-1)j\pi h) + 2\sin(ij\pi h) - \sin((i+1)j\pi h)\} \\ &= \sqrt{2h}\{-\sin(ij\pi h)\cos(j\pi h) + 2\sin(ij\pi h) - \sin(ij\pi h)\cos(j\pi h)\}, \end{aligned}$$

da \cos eine gerade Funktion ist. Weiter folgt

$$\begin{aligned} h^2(A_h v_j)_i &= \sqrt{2h}\sin(ij\pi h)\{2 - 2\cos(j\pi h)\} = 2\sqrt{2h}\sin(ij\pi h)(1 - \cos(j\pi h)) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right)\sqrt{2h}\sin(ij\pi h) = 4\sin^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right)(v_j)_i, \end{aligned}$$

also ist v_j Eigenvektor von A_h zum Eigenwert λ_j . Weiterhin gilt

$$\|v_j\|_2^2 = \sum_{i=1}^N 2h \sin^2(ij\pi h) = 2h \sum_{i=1}^N \sin^2\left(\frac{i\pi}{N}\right) = 1$$

sowie $(v_j, v_k)_2 = \delta_{j,k}$. △

Aufgabe 9.10: Im Jahr 1870 lieferte Weierstraß folgendes Gegenbeispiel zum so genannten Dirichlet-Prinzip, in dem er folgende Minimierungsaufgabe für stetige Funktionen vorstellte, die keine Lösung besitzt: Gesucht sei eine Funktion u , welche unter allen Funktionen in $C^1[-1,1]$ mit $u(-1) = 0$ und $u(1) = 1$ das Funktional $J(u) = \int_{-1}^1 [xu'(x)]^2 dx$ minimiert. Zeigen Sie mit Hilfe der durch

$$u_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\arctan(nx)}{\arctan n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

definierten Funktionenfolge $\{u_n\}$, dass die Aufgabe keine Lösung besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.10: Sei $C := \{u \in C^1[-1,1] : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ und sei $F(u) := \int_{-1}^1 (xu'(x))^2 dx$, $u \in C$. Setze

$$u_n(x) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dann ist $u_n \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist

$$\begin{aligned} 0 \leq F(u_n) &= \frac{1}{4 \cdot \arctan(n)^2} \int_{-1}^1 \frac{n^2 x^2}{(1 + (nx)^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{4n \cdot \arctan(n)} \int_{-n}^n \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} dy \\ &\leq \frac{1}{4n \cdot \arctan(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} dy. \end{aligned}$$

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = 0$. Folglich ist $\inf_{u \in C} F(u) = 0$.

Auf der anderen Seite gibt es kein $u \in C$ mit $F(u) = 0$. Denn ist $u \in C^1[-1,1]$ mit $F(u) = 0$, so ist $u' \equiv 0$ und somit ist u konstant. Damit ist $u \notin C$.

Soweit das Beispiel von Weierstraß aus dem Jahre 1870. Heute ist es natürlicher, einen Sobolev-Raum zu betrachten und die Menge

$$C_1 := \{u \in H^1(-1,1) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$$

zu betrachten. Da $H^1(-1,1) \hookrightarrow C[-1,1]$, ist C_1 abgeschlossen in $H^1(-1,1)$ (denn $u \mapsto u(1)$ ist ein stetiges Funktional auf $H^1(-1,1)$). Ferner ist C_1 konvex. Die Funktion $F : C_1 \rightarrow [0, \infty)$ ist stetig und $\inf_{u \in C_1} F(u) = 0$ wie wir gesehen haben. Dennoch gibt es kein $v \in C_1$ mit $F(v) = 0$. Das obige Argument funktioniert auch in dieser allgemeinen Situation. △

Aufgabe 9.11: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Polygon. Man zeige, dass bei der Triangulierung von Ω die Anzahl der Dreiecke plus Anzahl der Knoten minus Anzahl der Kanten stets 1 beträgt. Warum gilt das nicht für mehrfach zusammenhängende Gebiete?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.11: Es bezeichne

- v die Anzahl der Knoten (vertices),
- e die Anzahl der Kanten (edges),
- t die Anzahl der Dreiecke.

Wir entfernen ein Dreieck T mit $\bar{T} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Dafür können zwei Situationen auftreten, da Ω einfach zusammenhängend ist, vgl. Abbildung 9.2 Mit v', e', t'

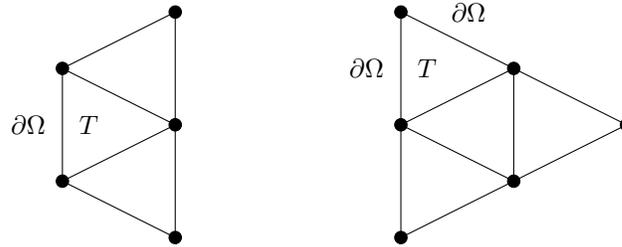


Abbildung 9.2. Dreieck T mit $\bar{T} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

bezeichnen wir die obigen Anzahlen für die Triangulierung, die nach Entfernen von T entsteht. Im links dargestellten Fall gilt $t' = t - 1, e' = e - 1, v' = v$, im rechts dargestellten Fall $t' = t - 1, e' = e - 2, v' = v - 1$. In beiden Fällen ergibt sich $t' + v' - e' = t + v - e$. Wir fahren fort, bis die Triangulierung nur noch aus einem Dreieck besteht, also $t'' = 1, v'' = 3, e'' = 3$, also

$$t + v - e = t'' + v'' - e'' = 1.$$

Bei nicht einfach zusammenhängenden Gebieten kann man nicht wie oben argumentieren, wie Abbildung 9.3 zeigt. \triangle

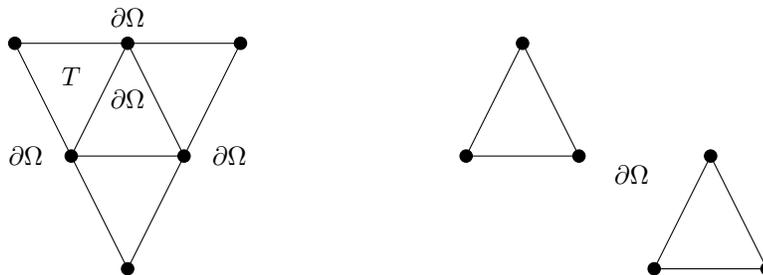


Abbildung 9.3. Beispiele für nicht-zusammenhängende Gebiete.

Aufgabe 9.12: Man zeige, dass für Dreiecksfamilien von Finiten Elementen die Quasi-Uniformitäts-Bedingung $\frac{\rho_T}{r_T} \leq \kappa, T \in \mathcal{T}_h, h > 0$ äquivalent ist zur Existenz einer globalen unteren Schranke für den kleinsten Innenwinkel aller Dreiecke.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.12: Sei $T \in \mathcal{T}_h$ und $\alpha \in (0, \pi)$ ein beliebiger Winkel in T . Dann gilt (vgl. Abbildung 9.4):

$$\alpha \geq \tan \alpha = \frac{b}{a} \geq \frac{\rho_T}{r_T} \geq \frac{1}{\kappa}.$$

△

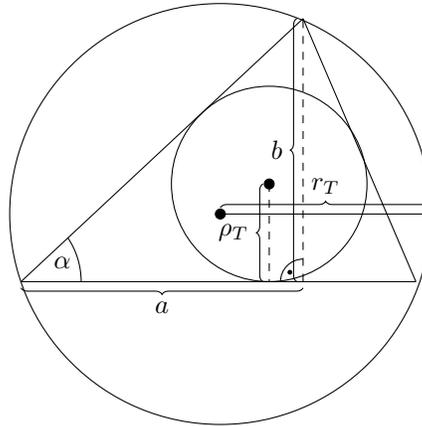


Abbildung 9.4. Dreieck T mit Innenkreis- ρ_T und Außenkreisradius r_T .

Aufgabe 9.13: Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Dreieck mit Eckpunkten t_1, t_2, t_3 . Zeigen Sie, dass jedes $x \in T$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.13: Sei $x \in T$, vgl. Abbildung 9.5. Wir be-

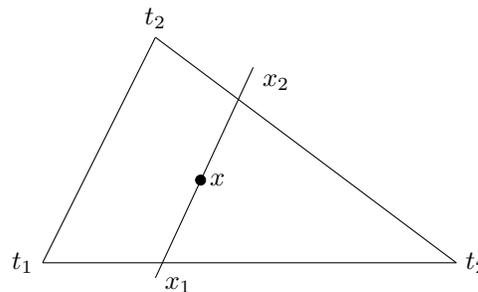


Abbildung 9.5. Konstruktion der Konvex-Kombination.

trachten die Parallele zu t_1, t_2 durch x und bezeichnen die Schnittpunkte mit den Seiten mit x_1 und x_2 . Dann gilt $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ mit $\alpha \in (0, 1)$. Aufgrund des

Strahlensatzes gibt es ein $\beta \in (0,1)$ mit $x_2 = \beta t_2 + (1-\beta)t_3$ und $x_1 = \beta t_1 + (1-\beta)t_3$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x &= \alpha(\beta t_1 + (1-\beta)t_3) + (1-\alpha)(\beta t_2 + (1-\beta)t_3) \\ &= \alpha\beta t_1 + (1-\alpha)\beta t_2 + (\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\beta))t_3 \\ &= \alpha\beta t_1 + (1-\alpha)\beta t_2 + (1-\beta)t_3 =: a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $a_i > 0$ wegen $\alpha, \beta \in (0,1)$ sowie $a_1 + a_2 + a_3 = \alpha\beta + \beta - \alpha\beta + 1 - \beta = 1$ wie behauptet. \triangle

Aufgabe 9.14: Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Dreieck und $E := \{v : T \rightarrow \mathbb{R} : \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } v(x) = a + bx_1 + cx_2, x = (x_1, x_2) \in \bar{T}\}$. Zeigen Sie, dass $\dim E = 3$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.14: Die Abbildung $L : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$E \ni v(x) = a + bx_1 + cx_2 \mapsto (a, b, c)^T$$

ist linear und bijektiv. Also ist E isomorph zum \mathbb{R}^3 . \triangle

Aufgabe 9.15: Sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,M} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}$, $M \geq 2$, eine Tridiagonalmatrix mit $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \dots, M-1$ und $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$, $1 \leq i \leq M-2$. Zeigen Sie, dass für $k = 1, \dots, M-1$

$$V^k := \left(\sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) \right)_{i=1,\dots,M-1}, \quad \mu_k := \left(2 - 2 \cos\left(k \frac{\pi}{M}\right) \right) = 4 \sin^2\left(\frac{k}{2} \frac{\pi}{M}\right),$$

Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von A sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.15: Es gilt

$$\begin{aligned} (AV^k)_1 &= 2 \sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) - \sin\left(2k \frac{\pi}{M}\right) = 2 \sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) - 2 \sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) \cos\left(k \frac{\pi}{M}\right) \\ &= \left(2 - 2 \cos\left(k \frac{\pi}{M}\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) = \mu_k V_1^k. \end{aligned}$$

Nun sei $2 \leq i \leq M-2$, dann gilt

$$\begin{aligned} (AV^k)_i &= 2V_i^k - V_{i-1}^k - V_{i+1}^k \\ &= 2 \sin\left(ik \frac{\pi}{M}\right) - \sin\left((i-1)k \frac{\pi}{M}\right) - \sin\left((i+1)k \frac{\pi}{M}\right). \end{aligned}$$

Wegen $\sin(k\pi) = 0$ bleibt diese Formel auch für $i = M-1$ gültig. Damit gilt mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} (AV^k)_i &= 2 \sin\left(ik \frac{\pi}{M}\right) - \left[\sin\left(ik \frac{\pi}{M}\right) \cos\left(k \frac{\pi}{M}\right) - \sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) \cos\left(ik \frac{\pi}{M}\right) \right] \\ &\quad - \left[\sin\left(ik \frac{\pi}{M}\right) \cos\left(k \frac{\pi}{M}\right) - \sin\left(k \frac{\pi}{M}\right) \cos\left(ik \frac{\pi}{M}\right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \cos\left(k \frac{\pi}{M}\right) \right) \sin\left(ik \frac{\pi}{M}\right) = \mu_k V_i^k, \end{aligned}$$

also die Behauptung. \triangle

Aufgabe 9.16: (Konvergenzrate der Galerkin-Approximation.) Seien V, H reelle Hilbert-Räume mit $V \hookrightarrow H$ und sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, stetig und koerziv. Wir setzen $D(A) := \{u \in V : \exists f \in H \text{ mit } a(u, v) = (f, v)_H \text{ für alle } v \in V\}$. Zu $0 < h \leq 1$ sei $V_h \subset V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Zu jedem $u \in D(A)$ gebe es eine Konstante $c_u > 0$ derart, dass $\text{dist}_V(u, V_h) := \inf\{\|u - \chi\|_V : \chi \in V_h\} \leq c_u \varphi(h)$ für $0 < h \leq 1$, wobei $\varphi : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ eine Funktion mit $\lim_{h \downarrow 0} \varphi(h) = 0$ ist.

- a) Man zeige, dass es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, so dass Folgendes gilt: Sei $f \in H$ und seien $u \in V, u_h \in V_h$ die Lösungen des Problems $a(u, v) = (f, v)_H, v \in V$ und des approximativen Problems $a(u_h, \chi) = (f, \chi)_H, \chi \in V_h$. Dann gibt es eine Konstante $c_1 > 0$ mit $\|u - u_h\|_V \leq c_1 \varphi(h) \|f\|_H, 0 < h \leq 1$.
- b) Setze $D(A^*) := \{w \in V : \exists g \in H \text{ mit } a(v, w) = (v, g)_H \text{ für alle } v \in V\}$. Es gebe auch zu jedem $w \in D(A^*)$ eine Konstante $c_w^* > 0$ derart, dass $\text{dist}_V(w, V_h) \leq c_w^* \varphi(h), 0 < h \leq 1$. Man zeige, dass es eine Konstante $c_2 > 0$ gibt derart, dass $\|u - u_h\|_H \leq c_2 \varphi(h)^2 \|f\|_H, 0 < h \leq 1$.
- c) Sei $H = L_2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ eine quasi-uniforme Familie von zulässigen Triangulierungen und sei V_h durch (9.35^{AU}) gegeben. Die Form a sei so, dass $D(A) \subset H^2(\Omega)$ und $D(A^*) \subset H^2(\Omega)$. Man zeige, dass es eine Konstante $c_3 > 0$ gibt derart, dass $\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq c_3 h^2 \|f\|_{L_2(\Omega)}, 0 < h \leq 1$.

Anleitung: a) Benutzen Sie das Céa-Lemma und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. b) Wenden Sie wie im Beweis von Satz 9.32^{AU} a) auf das duale Problem an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.16: Zu $f \in H$ gibt es nach dem Satz von Lax-Milgram eindeutige Lösungen $Lf \in V$ und $L_h f \in V_h$ der Probleme

$$\begin{aligned} a(Lf, v) &= (f, v)_H, \quad v \in V \text{ und} \\ a(L_h f, \chi) &= (f, \chi)_H, \quad \chi \in V_h. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $L, L_h : H \rightarrow V$ sind linear und stetig (siehe den Beweis des Satzes von Lax-Milgram). Beachte, dass $Lf \in D(A)$. Nach dem Céa-Lemma ist

$$\|Lf - L_h f\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \text{dist}_V(Lf, V_h) \leq c_u \frac{C}{\alpha} \varphi(h)$$

mit $u := Lf$, wobei C die Stetigkeitskonstante von a und α die Koerzivitätskonstante von a bezeichnen. Für jedes $f \in H$ ist also die Menge

$$\left\{ \frac{1}{\varphi(h)} (L - L_h)f : 0 < h \leq 1 \right\}$$

in V beschränkt. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit erhält man eine Konstante $c_1 > 0$, so dass

$$\|Lf - L_h f\|_V \leq c_1 \varphi(h) \|f\|_H$$

für alle $f \in H, 0 < h \leq 1$. Damit ist a) bewiesen.

Nun betrachten wir das duale Problem. Zu $g \in H$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $w \in V$, $w_h \in V_h$ mit

$$\begin{aligned} a(v, w) &= (v, g)_H, & v \in V \text{ und} \\ a(\chi, w_h) &= (\chi, g)_H, & \chi \in V_h. \end{aligned}$$

Teil a) der Aufgabe liefert uns eine Konstante $c_2 > 0$, so dass

$$\|w - w_h\|_V \leq c_2 \varphi(h) \|g\|_H$$

unabhängig von $g \in H$.

Wir kommen nun zu dem Beweis von b). Sei $f \in H$ fest, $u := Lf$, $u_h := L_h f$. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es $g \in H$ mit $\|g\|_H = 1$, so dass $\|u - u_h\|_H = (u - u_h, g)_H$.

Zu diesem g betrachten wir die Lösung w des dualen Problems sowie die approximativen Lösungen $w_h \in V_h$, $0 < h \leq 1$. Damit können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_H &= (u - u_h, g)_H = a(u - u_h, w) = a(u - u_h, w - w_h) \\ &\leq C \|u - u_h\|_V \|w - w_h\|_V \\ &\leq C c_1 \varphi(h) \|f\|_H c_2 \varphi(h) \|g\|_H = C c_1 c_2 \varphi(h)^2 \|f\|_H. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Galerkin-Orthogonalität

$$a(u - u_h, \chi) = (f, \chi)_H - (f, \chi)_H = 0, \quad \chi \in V_h$$

auf $\chi := w_h$ angewandt.

c) Ergibt sich aus b) mit Hilfe von Satz 9.27^{AU}.

△

10 Lösungen zu den Aufgaben Kapitel 10

Aufgabe 10.1: Schreiben Sie Maple[®]-Skripte zur Bestimmung der Lösungen der in Tabelle 2.1^{AU} aufgeführten partiellen Differenzialgleichungen. Wählen Sie dabei Anfangs- bzw. Randbedingungen so, dass die Bestimmung einer Lösungsformel mit Maple[®] möglich ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10.1: Die folgenden Worksheets stehen zur Verfügung:

Gleichung	Dateiname	Sheet
Lineare Transportgleichung	LinTransport	10.1 ^{AU}
Burgers-Gleichung	Burgers	10.1
Viskose Burgers-Gleichung	Burgers-viscous	10.1
Wärmeleitungsgleichung	heat-bsp-laplace heat-bsp-fourier	10.4 ^{AU} 10.3 ^{AU}
Poisson-Gleichung	Poisson	10.3
KdV-Gleichung	KdV KdV-Numerisch	10.4 10.5
Black-Scholes-Gleichung	BlackScholes	10.6 ^{AU}
Monge-Ampère-Gleichung	Monge-Ampere	10.6
Minimalflächengleichung	Minimalflaechen	10.7
Plattengleichung	Platten	10.8

Für die Navier-Stokes- und Maxwell-Gleichungen stellen wir keine Worksheets zur Verfügung, da diese Gleichungen keine analytische Lösung erlauben. \triangle

File: Burgers.mw

```
> restart;
> infolevel[pdsolve] := 5; -1
> eq := diff(u(t, x), t) + u(t, x) * (diff(u(t, x), x)) = 0; 1
      eq :=  $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0$ 
> Sol := pdsolve(eq); 1
```

Checking arguments ...

First set of solution methods (general or quase general solution)

Second set of solution methods (complete solutions)

Trying methods for first order PDEsSecond set of solution methods successful

$Sol := u(t, x) = \text{RootOf}(-x + _Z t + _F1(_Z))$

Maple®-Worksheet 10.1: Burgers-Gleichung.

File: Burgers-viscous.mw

```
> infolevel[pdsolve] := 5:
> eq := diff(u(t, x), t)+u(t, x)*(diff(u(t, x), x)) =
epsilon*(diff(u(t, x), x, x)):
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x)$$

```
> pdsolve(eq):
```

Checking arguments ...

First set of solution methods (general or quase general solution)

Second set of solution methods (complete solutions)

Trying methods for second order PDEs

Third set of solution methods (simple HINTs for separating variables)

PDE linear in highest derivatives - trying a separation of variables by *HINT = *

Fourth set of solution methods

Trying methods for second order linear PDEsPreparing a solution HINT ...

Trying HINT = _F1(t)*_F2(x)

Fourth set of solution methodsPreparing a solution HINT ...

Trying HINT = _F1(t)+_F2(x)

Trying travelling wave solutions as power series in tanh ...

* Using tau = tanh(C[0]+C[1]*t+C[2]*x)*

Equivalent ODE system: {-epsilon*C[2]^2*(-1+tau^2)^2*diff(diff(u(tau),tau),tau)+(-C[1]*(-1+tau^2)-u(tau)*C[2]*(-1+tau^2)-2*epsilon*C[2]^2*(-1+tau^2)*tau)*diff(u(tau),tau)}

* Ordering for functions: [u(tau)]

* Cases for the upper bounds: [[n[1] = 1]]

* Power series solution [1]: {u(tau) = A[1,0]+A[1,1]*tau}

* Corresponding system [1] for the coefficients {A[i,j], C[k]}: {(C[1]+A[1,0]*C[2])*A[1,1], C[2]*(A[1,1]+2*epsilon*C[2])*A[1,1]}

* Triangularized solution [1] via casesplit: [\casesplit/ans\('(A[1,0] = -C[1]/C[2], A[1,1] = -2*epsilon*C[2]),[C[1] <> 0, C[2] <> 0, epsilon <> 0)], \casesplit/ans\('(A[1,1] = 0),[1])* Solution [1] for {A[i,j], C[k]}: [[A[1,1] = 0], [A[1,0] = -C[1]/C[2], A[1,1] = -2*epsilon*C[2]]]

* Solution(s) in terms of {tau, A[i,k] and C[j]}: [{u(tau) = -C[1]/C[2]-2*epsilon*C[2]*tau}, {u(tau) = A[1,0]}]

travelling wave solutions successful.

$$u(t, x) = -\frac{C_2}{C_3} - 2\epsilon C_3 \tanh(C_1 + C_2 t + C_3 x)$$

Maple®-Worksheet 10.2: Viskose Burgers-Gleichung.

File: Poisson.mw

```
> restart:
> infolevel[pdsolve] := 5:
> eq := diff(u(x, y), x, x)+diff(u(x, y), y, y) = f(x, y):
      eq :=  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) = f(x, y)$ 
> pdsolve(eq):
```

Checking arguments ...

First set of solution methods (general or quase general solution)

Trying differential factorization for linear PDEs ...

differential factorization successful.

First set of solution methods successful

$$u(x, y) = _F1(y - ix) + _F2(y + ix) + \int^x \int^{-b} f(_a, i_a - 2i_b + ix + y) d_a d_b$$

Maple®-Worksheet 10.3: Poisson-Gleichung.

File: KdV.mw

```
> restart:
> infolevel[pdsolve] := 5:
> eq := diff(u(t, x), t) - 6*u(t, x)*(diff(u(t, x),
x)) + diff(u(t, x), x, x, x) = 0:
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - 6 u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t, x) = 0$$

Checking arguments ...

First set of solution methods (general or quase general solution)

Second set of solution methods (complete solutions)

Third set of solution methods (simple HINTs for separating variables)

PDE linear in highest derivatives - trying a separation of variables by *HINT =

*Fourth set of solution methods

Preparing a solution HINT ...

Trying HINT = _F1(t)*_F2(x)

Fourth set of solution methods

Preparing a solution HINT ...

Trying HINT = _F1(t)+_F2(x)

Trying travelling wave solutions as power series in tanh ...

* Using tau = tanh(C[0]+C[1]*t+C[2]*x)

* Equivalent ODE system: $\{-C[2]^3*(-1+\tau^2)*(1-2*\tau^2+\tau^4)*diff(diff(diff(u(\tau),\tau),\tau),\tau)-C[2]^3*(-1+\tau^2)*(-6*\tau+6*\tau^3)*diff(diff(u(\tau),\tau),\tau)+(-C[1]*(-1+\tau^2)+6*u(\tau)*C[2]*(-1+\tau^2)-C[2]^3*(-1+\tau^2)*(6*\tau^2-2))*diff(u(\tau),\tau)\}$

* Ordering for functions: [u(tau)]

* Cases for the upper bounds: [[n[1] = 2]]

* Power series solution [1]: {u(tau) = A[1,0]+A[1,1]*tau+A[1,2]*tau^2}

* Corresponding system [1] for the coefficients {A[i,j], C[k]}: $\{-C[1]+6*A[1,0]*C[2]+2*C[2]^3)*A[1,1], -24*C[2]^3*A[1,2]+12*A[1,2]^2*C[2], 18*A[1,1]*C[2]*A[1,2]-6*A[1,1]*C[2]^3, -16*C[2]^3*A[1,2]+2*A[1,2]*C[1]-12*A[1,2]*A[1,0]*C[2]-6*A[1,1]^2*C[2], -18*A[1,1]*C[2]*A[1,2]-A[1,1]*C[1]+6*A[1,1]*A[1,0]*C[2]+8*A[1,1]*C[2]^3, -2*A[1,2]*C[1]+12*A[1,2]*A[1,0]*C[2]-12*A[1,2]^2*C[2]+40*C[2]^3*A[1,2]+6*A[1,1]^2*C[2]\}$

* Triangularized solution [1] via casesplit: [\backslash casesplit/ans\ \backslash ([A[1,0] = (-4/3*C[2]^3+1/6*C[1])/C[2], A[1,1] = 0, A[1,2] = 2*C[2]^2],[C[1] <> 0, C[2] <> 0]), \backslash casesplit/ans\ \backslash ([A[1,1] = 0, A[1,2] = 0],[1]) * Solution [1] for {A[i,j], C[k]}: [[A[1,1] = 0, A[1,2] = 0], [A[1,0] = -1/6*(8*C[2]^3-C[1])/C[2], A[1,1] = 0, A[1,2] = 2*C[2]^2]]

* Solution(s) in terms of {tau, A[i,k] and C[j]}: [{u(tau) = -1/6*(8*C[2]^3-C[1])/C[2]+2*C[2]^2*tau^2}, {u(tau) = A[1,0]}]

travelling wave solutions successful.

$$u(t, x) = -1/6 \frac{8-C3^3 - C2}{-C3} + 2-C3^2 (\tanh(-C1 + C2 t + C3 x))^2$$

File: KdV-Numerisch.mw

```
> restart;
> Eq1 := diff(u(x,t), t) - 6 * u(x,t)*diff(u(x,t), x) +
diff(u(x,t), x, x, x) = 0;
```

$$Eq1 := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - 6 u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) = 0$$

```
> Eq2 := {u(2,t)=u(0,t), D[1](u)(2,t)=D[1](u)(0,t),
D[1,1](u)(2,t)=D[1,1](u)(0,t)};
```

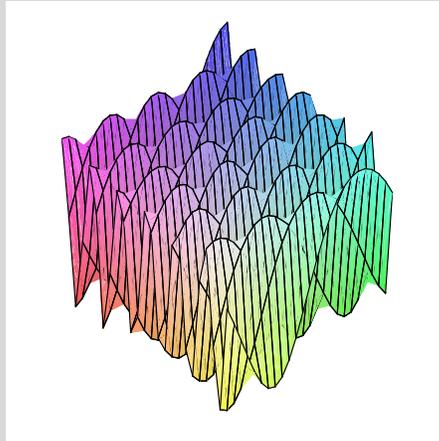
$$Eq2 := \{u(2, t) = u(0, t), D_1(u)(2, t) = D_1(u)(0, t), \\ (D_{1,1})(u)(2, t) = (D_{1,1})(u)(0, t)\}$$

```
> Eq3 := {u(x,0) = cos(Pi*x)};
```

$$Eq3 := \{u(x, 0) = \cos(\pi x)\}$$

```
> Soln1 := pdsolve(Eq1, Eq2 union Eq3, numeric,
spacestep=0.01, timestep=0.01);
```

```
> Soln1:-plot3d(t=0..1.2, x=0..2);
```



Maple®-Worksheet 10.5: Numerische Lösung der KdV-Gleichung.

File: Monge-Ampere.mw

```

> restart:
> with(VectorCalculus):
> infolevel[pdsolve] := 5:
> H := Hessian(u(x, y), [x, y]):

```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \end{bmatrix}$$

```

> eq := Det(H) = 0:

```

$$eq := \text{Det} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \end{bmatrix} \right) = 0$$

```

> Sol := pdsolve(eq):

```

Checking arguments ...

First set of solution methods (general or quase general solution)

Trying methods for PDEs "missing the dependent variable" ...

Second set of solution methods (complete solutions)

Trying methods for second order PDEs

Third set of solution methods (simple HINTs for separating variables)

Fourth set of solution methods

Preparing a solution HINT ...

Trying HINT = _F1(x)+_F2(y)+_F1(x)*_F2(y)

Trying travelling wave solutions as power series in tanh ...

Trying travelling wave solutions as power series in ln ...

Sol :=

File: Minimalflaechen.mw

```

> restart:
> infolevel[pdsolve] := 5:
> eq := (1+diff(u(x, y), y))^2*(diff(u(x, y), x,
x))-2*(diff(u(x, y), x))*(diff(u(x, y), y))*(diff(u(x,
y), x, y))+(1+diff(u(x, y), x))^2*(diff(u(x, y), y, y)) =
0:
eq :=  $\left(1 + \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y)\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) + \left(1 + \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0$ 
> pdsolve(eq):
Checking arguments ...
First set of solution methods (general or quase general solution)
Trying methods for PDEs "missing the dependent variable" ...
Second set of solution methods (complete solutions)
Trying methods for second order PDEs
Third set of solution methods (simple HINTs for separating variables)
PDE linear in highest derivatives - trying a separation of variables by *HINT =
*Fourth set of solution methodsPreparing a solution HINT ...
Trying HINT = _F1(x)*_F2(y)
Fourth set of solution methodsPreparing a solution HINT ...
Trying HINT = _F1(x)+_F2(y)+_F1(x)*_F2(y)
Trying travelling wave solutions as power series in tanh ...
* Using tau = tanh(C[0]+C[1]*x+C[2]*y)
* Equivalent ODE system: ...
Trying travelling wave solutions as power series in ln ...
* Using tau = ln(C[0]+C[1]*x+C[2]*y)*
Equivalent ODE system: ...
* Triangularized solution [1] via casesplit: [\casesplit/ans\'([A[1,1] = 0],[1])
* Solution [1] for {A[i,j], C[k]}: [[A[1,1] = 0]]
* Solution(s) in terms of {tau, A[i,k] and C[j]}: [{u(tau) = A[1,0]}]
* Using tau = ln(C[0]+C[1]*x+C[2]*y)
* Equivalent ODE system: ...
* Using tau = tanh(C[0]+C[1]*x+C[2]*y)
* Equivalent ODE system: ...
Trying extended travelling wave solutions in ln (not power series) ...
extended travelling wave solutions successful.

```

$$u(x, y) = _C3 + _C4 (_C3 + _C1 x + _C2 y)$$

Maple®-Worksheet 10.7: Minimalflächengleichung (Ausgabe stark gekürzt).

File: Platten.mw

```
> restart:
> infolevel[pdsolve] := 5:
> eq := diff(u(x, y), x, x, x, x)+2*(diff(u(x, y), x, x,
y, y))+diff(u(x, y), y, y, y, y) = 0:
```

$$eq := \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, y) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x, y) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x, y) = 0$$

```
> pdsolve(eq):
```

$$u(x, y) = _F1(y - ix) + _F2(y - ix)x + _F3(y + ix) + _F4(y + ix)x$$

Maple[®]-Worksheet 10.8: Plattengleichung.

Aufgabe 10.2: Schreiben Sie Programme zur Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung mittels Finiter Differenzen und Finiter Elemente. Vergleichen Sie die Laufzeiten mit denen von Worksheet 10.5^{AU}.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10.2: Im Folgenden ist ein Matlab-Programm angegeben. Die Laufzeiten sind bei beiden Programmen in etwa gleich (0.07sec). Bei derart „kleinen“ Problemen sind keine wesentlichen Laufzeit-Unterschiede zu erwarten. △

```
% Waermeleitungsgleichung mit Dirichlet-RBen
% - implizite Euler-Methode -
%
% x=0 : Dirichlet      (=fr1!)
% t=0 : Anfangsbedingung (=fr!)
%
% h : Ortsschrittweite
% k : Zeitschrittweite
% n0 : Anzahl der Iterationen*10
%
%
h=0.05;k=0.02; % Gitterweiten
n0=floor(1/k); % Iterationen

fr = @(x) ones(size(x)); % Anfangsbedingung
f = @(t,x) (-1)*(t.^2+x).*(exp(-t.*x)); % inhomogene rechte Seite
fr1 = @(t) exp(-t);

x=[0:0.05:1];n=length(x);
xi = fr(x);
xi = xi';

n0=10*n0;t0=n0*k;
[xg,yg]=meshgrid([0:h:1],[0:k:t0]);

%-- Aufstellung der Steifigkeitsmatrix
r=k/(h^2);

a=zeros(n,1);
b=zeros(n,1);
c=zeros(n,1);

a(1)=1;
a(2:n)=2+2*r;

b(3:n)=-r;

c(1:n-2)=-r;
c(n-1)=-2*r;

A=spdiags([c a b], -1:1, n, n);
```

```
%-- Systemmatrix fuer impliziten Euler
B=-A;
for iz=1:n,
    B(iz,iz)=2-2*r;
end;

cpe=cputime;
l=0;
zg = zeros(n0+1,size(xi,1));
for iz=1:(n0+1),
    t=(iz-1)*k;

    fkk=f(t,x);
    xr1 = fr1(t);
    t=iz*k;
    fkk1 = f(t,x);

    xr11 = fr1(t);
    d=B*xi;
    d=d-k*(fkk'+fkk1');

    d(1)=xr11;
    xi=A\d;
    zg(iz,:)=xi';
end;
ept=cputime-cpe

mesh(xg,yg,zg);
xlabel('x');ylabel('t');zlabel('U(x,t)');
```

Literaturverzeichnis

- [1] ARENDT, W., C. J. K. BATTY, M. HIEBER und F. NEUBRANDER: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [2] BRÉZIS, H.: *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [3] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 6. Aufl., 2007.