Prof. Dr. Stefan Funken
Kristina Steih
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 1
WS 2011/12

Übungsblatt 2

(Abgabe Mittwoch, den 16.11.2011 um 14 Uhr **vor** den Übungen.)

Aufgabe 1 *(LR-Zerlegung)* (8 Punkte)

Compute the LU decomposition of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -1 \\ -12 & -25 & -6 \\ -8 & 10 & -51 \end{pmatrix}.$$

Apply this decomposition as well as forward and back substitution to solve $Ax = b$ for $b = \left(\frac{50}{3}, -43, 9\right)^T$.
Please use fractions instead of decimals in all your calculations and specify all computational steps.

Aufgabe 2 *(LR-Zerlegung tridiagonaler Matrizen)* (20 Punkte)

Wir betrachten ein Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $b \in \mathbb{R}^n$ mit einer tridiagonalen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: Ist A irreduzibel diagonaldominant, d.h. gilt $|a_1| > |c_1| > 0$, $|a_n| \geq |b_{n-1}| > 0$ und $|a_i| \geq |b_{i-1}| + |c_i|$, $b_{i-1} \neq 0$, $c_i \neq 0$ für alle $2 \leq i \leq n-1$, so existiert eine Zerlegung $A = L \cdot R$ mit

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \gamma_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

indem Sie

(i) Rekursionsformeln für α_i, β_i, γ_i herleiten (unter der Annahme, dass die Zerlegung existiert),

(ii) die Abschätzungen $|\gamma_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, und $|\alpha_i| > 0$, $i = 1, \ldots, n$, beweisen,

(iii) nachweisen, dass A regulär ist.

(b) Welchen Aufwand hat die Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, bei Verwendung der in (a) hergeleiteten Formeln?

Aufgabe 3 *(Abgeschlossenheit der Menge der Dreiecksmatrizen)* (12 Punkte)

(a) Gegeben seien zwei obere Dreiecksmatrizen $A = (a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B = (b_{kj})_{k,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ d.h., $a_{ik} = 0$ für $i > k$ und $b_{kj} = 0$ für $k > j$. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier oberer Dreicksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Sei $B := A^{-1}$ die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix A. Zeigen Sie B ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix.

Diese Aufgabe muss in LaTeX abgegeben werden.