Prof. Dr. Stefan Funken
Kristina Steih
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 5

(Abgabe Mittwoch, den 11.01.2011 um 14 Uhr **vor** den Übungen.)

Aufgabe 1 *(Matrixnorm und Eigenwerte)* (4 Pkte)

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\|A\|_2 = |\lambda_{\max}(A)|$ (vgl. Aufgabe 4, Blatt T4). Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix $A \in R^{n\times n}$ im Allgemeinen nur $\|A\|_2 \geq |\lambda_{\max}(A)|$ gilt und weisen Sie nach, dass Matrizen mit $\|A\|_2 > |\lambda_{\max}(A)|$ für alle $n \geq 2$ existieren.

Aufgabe 2 *(Richardson-Iteration)* (12 Pkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) $e_k := x_k - x$ bezeichne den Fehlervektor nach der k-ten Iteration des Richardson Verfahrens, also

$$x_{k+1} = x_k - \omega(Ax_k - b).$$

Zeigen Sie, dass die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$||e_k||_2 \leq \varrho(I - \omega A)^k ||e_0||_2.$$

Hierbei bezeichnet $\varrho(B)$ den Spektralradius der Matrix B.

(b) Falls die Eigenwerte λ von A die Ungleichungen $0 < c \leq \lambda \leq C$ erfüllen, wie ist dann der Parameter ω zu wählen, damit die Richardson Iteration möglichst schnell (im Sinne der euklidischen Norm) gegen die Lösung von $Ax = b$ konvergiert? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(c) Führen Sie von Hand für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Richardson-Verfahrens mit optimalem Parameter ω aus (ω muss berechnet werden). Wählen Sie als Startvektor den Vektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ und geben Sie alle Ihre Rechenschritte an.

Aufgabe 3 *(Jakobi und Gauß-Seidel)* (17 Pkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Seidel Methode für alle linearen Gleichungssysteme mit symmetrisch positiv definiter Koeffizienten-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Gleichung

$$(1 - \lambda)v^T Dv = (1 + \lambda)v^T Av$$

für alle Eigenwerte λ von $-(L + D)^{-1}R$ mit dazugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Führen Sie von Hand für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jeweils zwei Schritte des Jakobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens durch, ohne dabei (außer für Diagonalmatrizen) Inversen von Matrizen zu berechnen. Wählen Sie als Startvektor den Vektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ und geben Sie alle Ihre Rechenschritte an.

(c) Geben Sie für das Jakobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren jeweils eine komponentenweise Darstellung an (mit Erklärung).

(d) Bei der Parallelisierung versucht man, Computer-Berechnungen wie z.B. einen Iterationsschritt eines Iterations-Verfahrens auf mehrere Prozessoren so aufzuteilen, dass die einzelnen Arbeitsschritte dort gleichzeitig und möglichst unabhängig voneinander durchgeführt werden können.
Diskutieren Sie: Welches der beiden Verfahren lässt sich besser parallelisieren?

Aufgabe 4 *(Convergence)* (7 Pkte)

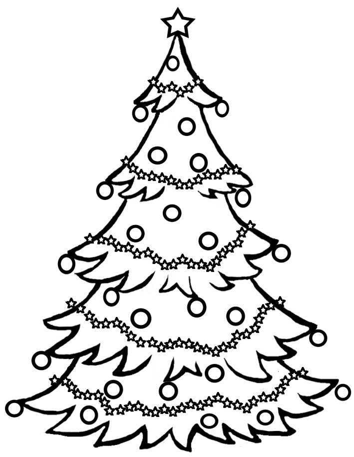
Consider your calculations in Exercises 2 and 3. The exact solution for both equation systems is $x = (1, 1, 1)^T$.

a) For all three iteration methods, calculate the errors $\|e^{(0)}\|_2$, $\|e^{(1)}\|_2$ and $\|e^{(2)}\|_2$, where $e^{(i)} := x^{(i)} - x$.

b) Plot all errors in one plot. What do you see?

c) Was this behaviour to be expected?

You may use Matlab or other tools to obtain solutions of the necessary computations in this exercise if you specify what calculations have been performed. This exercise has to be written in LaTeX. Place your plot inside a *figure*-environment and make sure that it is properly labelled.



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!