Prof. Dr. Stefan Funken
Kristina Steih
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 1
WS 2011/12

Übungsblatt 6

(Abgabe Mittwoch, den 25.01.2011 um 14 Uhr **vor** den Übungen.)

Aufgabe 1 (Satz von Stein und Rosenberg) (12 Punkte)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Berechnen Sie für die Matrizen

$$(i)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (ii)\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jeweils die Iterationsmatrizen C_J bzw. C_G für das Jacobi- bzw. das Gauss-Seidel-Verfahren, sowie die Spektralradien der Matrizen C_J und C_G.

Was lässt sich über die Konvergenz der beiden Verfahren für die jeweilige Matrix A_i ($i \in \{1, 2\}$) sagen? Widerspricht das dem Satz von Stein und Rosenberg?

Aufgabe 2 (Gradientenverfahren) (14 Punkte)

This problem has to be written in LaTeX.

(a) Perform four steps of the gradient method for the linear system

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

and initial point $x_0 = (1, 1)^T$. Draw $x_0, \dots, x_4$ into a two-dimensional coordinate system.

(b) We consider the linear system

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As initial point for the gradient method we use $x_0 = (a, 1)^T$. Show that with the $k - th$ iterate $x_k = (x_k, y_k)^T$ there holds $x_{k+1} = \rho \cdot (x_k, -y_k)^T$, with $\rho = \frac{a-1}{a+1}$. For $a = 20$, draw $x_0, \dots x_5$ into a two-dimensional coordinate system (choose the scaling of the axes appropriately).