Prof. Dr. Stefan Funken
Kristina Steih
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 1
WS 2011/12

Übungsblatt 7

(Abgabe Mittwoch, den 08.02.2011 um 14 Uhr **vor** den Übungen.)

Anmeldung zum Leistungsnachweis

Bitte melden Sie sich spätestens bis zum 15. Februar 2012 im Hochschulportal für den Leistungsnachweis zur Vorlesung Numerik I an.
(Die Anmeldung zur Vorleistung ist unabhängig von der Anmeldung zur Klausur. Sie müssen sich auch für die Vorleistung anmelden, wenn Sie die Klausur dieses Semester nicht mitschreiben, damit Sie die Vorleistung nicht mehr erbringen müssen, wenn Sie in Zukunft an einer Numerik I Klausur teilnehmen wollen.)

Aufgabe 1 (cg-Verfahren) (10 Punkte)

Consider the quadratic function $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, $x \in \mathbb{R}^2$, with

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determine the minimum of f using the cg method. Choose $x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ as initial guess and use fractions in your calculations.

Aufgabe 2 (Iterationszahl cg-Verfahren) (6 Punkte)

Wie viele Iterationen braucht das cg-Verfahren höchstens, um die Lösung von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -0.5 & 0 & 2 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

für einen beliebigen Startwert x_0 zu finden?
Zeigen Sie, dass für einen Startwert x_0 mit $r_0 = b - Ax_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}^T$ sogar nur 1 Iterationsschritt benötigt wird. Diese Aufgabe muss mit LaTeX aufgeschrieben werden.

Aufgabe 3 (Tschebyscheff-Polynome) (14 + 14* Punkte)

Gehen Sie von der globalen Darstellung der Tschebyscheff-Polynome

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left((x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

aus.

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$T_k(\cos(\phi)) = \cos(k\phi), \qquad \forall\, \phi \in \mathbb{R},$$
$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \qquad \forall\, x \in [-1, 1].$$

b) Die Nullstellen von $T_k(x)$ spielen in der Polynominterpolation eine wichtige Rolle (s. Numerik II). Zeigen Sie, dass diese Nullstellen durch

$$x_j := \cos\left(\frac{2j-1}{2k}\pi\right), \qquad j = 1, \ldots, k,$$

gegeben sind und damit im Intervall $[-1, 1]$ liegen.

c) Die (bekannteren) Polynome T_k nennt man auch Tschebyscheff-Polynome *erster Art*. Für die *Tschebyscheff-Polynome zweiter Art* gilt $U_k(x) := \frac{1}{k+1}\frac{d}{dx}T_{k+1}(x)$. Leiten Sie eine globale Darstellung für $U_k(x)$ her und zeigen Sie damit, dass diese Polynome die gleiche Drei-Term-Rekursion erfüllen wie die $T_k(x)$, wobei $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ gilt.

d)* Die Rekursion zur Berechnung der $T_k(x)$ kann man auch im Matrix-Vektor-Format

$$\begin{pmatrix} T_{k+1}(x) \\ T_k(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_k(x) \\ T_{k-1}(x) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_0(x) \end{pmatrix}$$

schreiben. Bestimmen Sie die Matrix A und stellen Sie folgende Überlegungen zum Berechnungsaufwand der Tschebyscheff-Polynome an:

- Wie kann man die Matrix-Potenz A^k geschickt berechnen? (*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst ein $k = 2^m$. Wie viele Matrix-Matrix-Multiplikation werden hierfür benötigt? Wie kann man das für allgemeine k nutzen?)
- Was für eine Ordnung hat dann der Aufwand der Berechnung der T_{k+1} über diese Matrixpotenz-Darstellung?
- Wie verhält sich dies zum Aufwand der Berechnung über die Rekursionsformel?

e)* Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome erster Art für $k \geq 1$ ebenfalls die Darstellung

$$T_k(x) = \det A \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2x & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

haben.

Aufgabe 4* (Ausgleichsproblem) (8* Punkte)

Gegeben seien die Daten $(x_1, f_1) = (0, -2)$, $(x_2, f_2) = (1, -1)$, $(x_3, f_3) = (2, 2)$, $(x_4, f_4) = (3, 7)$. Fitten Sie eine Funktion $g(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ an die Daten, indem Sie die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{4} (g(x_i) - f_i)^2$$

minimieren.