

Übungen 2 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)
[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/
vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html)

Aufgabe 2.1 (Verdünnung einer Lösung)

Ein Zylinder enthalte 2kg Wasser, und es seien 50g Saccharose darin gelöst. Durch eine Röhre fließt 10g Wasser pro Minute in den Zylinder, während durch eine andere Röhre 10g Wasser pro Minute – einschließlich eines bestimmten Saccharoseanteils – abfließt. Wie vermindert sich die Masse der Saccharose als Funktion der Zeit?

Aufgabe 2.2 (Analytische Lösung von gew. Differentialgleichungen)

Berechnen Sie die analytische Lösung $c(t)$, $v_1(t)$ und $v_2(t)$ der folgenden Differentialgleichungen für beliebigen Anfangswert.

- (i) $\dot{c} = c^2$
- (ii) $\dot{v}_1 = \frac{v_1}{t}$
- (iii) $\dot{v}_2 = -\frac{v_2}{t}$

Aufgabe 2.3 (Graphische Analyse)

Analysieren Sie die folgenden Differentialgleichungen graphisch: Finden Sie alle Fixpunkte, klassifizieren Sie deren Stabilität und skizzieren Sie den Graph der Lösungen für verschiedene Anfangswerte.

- (i) $\dot{x} = 4x^2 - 16$
- (ii) $\dot{y} = y - y^2$
- (iii) $\dot{z} = 1 + \frac{1}{2} \cos(z)$

Aufgabe 2.4 (Tumor-Wachstum)

Das Wachstum eines Tumors kann mit dem Gompertz-Gesetz

$$\dot{N} = -aN \ln(bN)$$

besser modelliert werden als mit dem logistischen Wachstumsgesetz nach Verhulst

$$\dot{N} = a(N_{\max} - N)N.$$

Dabei ist $N > 0$ proportional zur Anzahl der Tumorzellen; a , b und N_{\max} sind positive Parameter.

1. Skizzieren und vergleichen Sie die Graphen von N für beide Wachstumsgesetze.
 2. Interpretieren Sie a , b und N_{\max} biologisch.
 3. Klassifizieren Sie die Fixpunkte der beiden Modelle mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse.
-