

### Übungen 5 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html>

---

#### Aufgabe 5.1 (Pitchfork-Bifurkation)

Analysieren Sie die folgenden Differentialgleichung, und zeigen Sie, dass eine Pitchfork-Bifurkation auftreten kann. Ist diese super- oder subkritisch?

- (i)  $\dot{x} = x + rx^3$
- (ii)  $\dot{y} = y - ry^3$
- (iii)  $\dot{z} = z + \frac{rz}{1+z^2}$ .

#### Aufgabe 5.2 (Insektenplage)

Der *spruce budworm* (Fichten-Knospenbohrer?) ist ein Schädling in Ost-Kanada, der dort ganze Wälder zerstört. Die Dynamik des Waldes kann als konstant angesehen werden. Die Dynamik der Wurmpopulation kann durch

$$\dot{N} = RN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N)$$

beschrieben werden. Die Wurmpopulation wächst logistisch, wenn keine Räuber vorhanden sind. Der Parameter  $K$  wird bestimmt durch die Menge an Laub in den Bäumen und ändert sich mit den Jahreszeiten.

Der Term  $p(N)$  beschreibt den Tod durch „gefressen werden“: Ab einer bestimmten Populationsgröße beginnen die Vögel, die Würmer zu fressen, so schnell sie können. Dieses Verhalten wird durch

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

mit  $A, B > 0$  modelliert.

- A) Entdimensionalisieren Sie die Differentialgleichung, indem Sie sie durch  $B$  teilen und in die Variable  $x := \frac{N}{A}$  transformieren. Benutzen Sie auch die dimensionslose Zeit  $\tau := \frac{Bt}{A}$  und Parameter  $r := \frac{RA}{B}$ ,  $k := \frac{K}{A}$ .
- B) Bestimmen Sie die Fixpunkte der dimensionslosen Differentialgleichung.
- C) Bestimmen Sie die Stabilität der Fixpunkte (evtl. graphisch) in Abhängigkeit von  $k$  und  $r$ .
- D) Berechnen Sie Bifurkationskurven: Kurven in der  $(k, r)$ -Ebene in Abhängigkeit von  $x$ , an deren Punkte eine Bifurkation auftritt.

#### Aufgabe 5.3 (Phasenportrait)

Mit dem Befehl `quiver` können Sie Phasenportraits in MATLAB schnell und einfach erstellen. Schreiben Sie sich eine Funktion, mit deren Hilfe Sie die Phasenportraits folgender Systeme ansehen können:

- (i)  $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 1 - e^x$
  - (ii)  $\dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = -|y|$
  - (iii)  $\dot{x} = y \sin(x), \quad \dot{y} = x^2 - y$ .
-