

**Übungen 11 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)**

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html>

---

**Aufgabe 11.1** (Hopf Bifurkationen: Übergänge von Gleichgewichten zu Grenzzyklen)

Betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \mu x + xy^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y - x^2\end{aligned}\tag{1}$$

- Zeige, dass eine Hopf-Bifurkation am Fixpunkt  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  mit sich änderndem  $\mu$  auftritt. Für welches  $\mu$  tritt diese ein?
- Visualisiere die Hopf-Bifurkation numerisch mit den Verfahren aus Blatt 6.
- Bestimme die Eigenschaft der Hopf-Bifurkation analytisch: Ist diese super- oder subkritisch?

**Hinweis:** Schreibe (1) zuerst in der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y + f(x, y) \\ \dot{y} &= \omega x + g(x, y),\end{aligned}$$

wobei  $f$  and  $g$  nichtlineare Terme enthalten. Bestimme hierauf

$$a = \frac{1}{16} \left( f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega} \{ f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy} \} \right),$$

wobei die partiellen Ableitungen an  $(x^*, y^*)$  ausgewertet werden. Dann gilt für die Hopf-Bifurkation:

$$\begin{aligned}a < 0 & \quad \text{superkritisch (stabiler Grenzzyklus)} \\ a > 0 & \quad \text{subkritisch (instabiler Grenzzyklus)}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 11.2** (Oszillierende chemische Reaktionen)

Ein einfaches dimensionsloses chemisches System stellt der **Brusselator** dar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - (b + 1)x + ax^2y \\ \dot{y} &= bx - ax^2y,\end{aligned}$$

mit  $a, b > 0$  und „Konzentrationen“,  $x, y \geq 0$ .

- Bestimme alle Fixpunkte und klassifiziere sie.
  - Visualisiere die Hauptisoklinen und finde die *trapping*-Region des Flusses.
  - Zeige, dass eine Hopf-Bifurkation auftritt und bestimme den kritischen Wert  $b = b_{\text{crit}}$ .
  - Argumentiere mit dem *Satz von Poincaré-Bendixson*, ob es Grenzzyklen für  $b < b_{\text{crit}}$  oder  $b > b_{\text{crit}}$  gibt.
  - Was ist die ungefähre Periode des Grenzzyklus für  $b \approx b_{\text{crit}}$ ?
  - Erstelle numerisch Phasenportraits für sich ändernde Parameter (halte beispielsweise  $a$  konstant und variiere  $b$ ). Zeichne auch die Hauptisoklinen aus b) ein.
-