Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Marc Fein
Jochen Siehr

Übungen 12 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html

---

Aufgabe 12.1 (Iterative Abbildungen)
Betrachten Sie die iterative Abbildung

$$x_{n+1} = \begin{cases} 4x_n^2, & 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n, & \frac{1}{2} < x_n \leqslant 1 \end{cases}$$

mit $x_0 \in [0, 1]$.

(a) Stellen Sie die Abbildung graphisch dar.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunkte.

(c) Bestimmen Sie die Stabilität der Fixpunkte.

(d) Bestimmen Sie die Trajektorie der Abbildung für die Startwerte $x_0 = 0.2$ und $x_0 = 0.7$, indem Sie mindestens 20 Punkte berechnen, z. B. mit `MATLAB`.

Aufgabe 12.2 (Poincaré-Abbildung)
Betrachten Sie die Differentialgleichung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

mit $r, \theta \geqslant 0$. Benutzen Sie eine Poincaré-Abbildung, um zu zeigen, dass dieses System einen eindeutigen Grenzzyklus hat. Klassifizieren Sie dessen Stabilität.

Kurze Anleitung:

- Lösen Sie das DGL-System analytisch.
- Wählen Sie die positive x-Achse als Schnittfläche S, auf der Sie die Periode beobachten.
- Stellen Sie die Formel für die Poincaré-Abbildung P auf.
- Plotten Sie P, um den Fixpunkt r^* zu erraten, und überprüfen Sie ihn.
- Berechnen Sie $P'(r^*)$.
