

Übungen 13 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)
[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/
vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html)

Aufgabe 13.1 (Invariante Menge)

Zeigen Sie, dass die z -Achse eine invariante Menge des Lorenz-Systems ist.

Aufgabe 13.2 (Hopf-Bifurkation im Lorenz-System)

Zeigen Sie, dass bei

$$r = r_H := \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

im Lorenz-System eine Hopf-Bifurkation in C^+ und C^- auftritt. Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom für die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des Lorenz-Systems in C^+ und C^- durch

$$P(\lambda) := \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass es bei r_H eine Lösung dieser Gleichung der Form $\lambda = i\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, falls $\sigma > b + 1$.
- Theoretisch müssten Sie noch zeigen, dass für diese Eigenwerte $\frac{d}{dr}\Re(\lambda(r_H)) \neq 0$ gilt.

Finden Sie auch den dritten (reellen) Eigenwert.

Aufgabe 13.3 (Numerische Integration des Lorenz-Systems)

Simulieren Sie das Lorenz-System mit verschiedenen Werten für die Parameter. Überprüfen Sie dabei numerisch folgende Aussagen aus der Vorlesung:

- Stabiler Fixpunkt in 0 für $r < 1$.
 - Stabile Fixpunkte C^\pm für $1 < r < 13.93$.
 - Transientes Chaos für $13.93 < r < r_H \approx 24.06$.
 - Seltsamer Attraktor oder Grenzzyklus für $r_H < r < 313$.
 - Stabiler Grenzzyklus für $r > 313$.
-