Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Blatt 5

(**Abgabe** Mittwoch, 09.01.2013 **vor** den Theorie-Übungen in H2)

- Die Prüfung zur Numerik 1 findet als **offene Klausur** statt.
  Termine sind: **28.02.2013, 12:00-14:00** und **11.04.2013, 10:00-12:00**.
- Bitte beachten Sie, dass für die Zulassung zur Klausur neben 50% der Punkte der Theorie-Übungsblätter und 50% der Punkte der Matlab-Übungsblätter mindestens vier der gekennzeichneten Aufgaben in LaTeX gesetzt und ausgedruckt abgegeben werden müssen.
- Auf diesem wie auch auf den folgenden Übungsblättern werden noch jeweils zwei Aufgaben als LaTeX-Aufgabe angeboten. Sollten Sie bereits vier oder mehr Aufgaben in LaTeX abgegeben haben, können Sie diese Aufgaben natürlich auch handschriftlich abgeben. Die Anzahl Ihrer bis dato abgegebenen LaTeX-Blätter wird baldmöglichst im SLC unter "Übungsblatt 8" online abrufbar sein.

Aufgabe 17 *(Konvergenz iterativer Verfahren, LaTeX -Aufgabe)* (4+3 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$. Wir betrachten ein iteratives Verfahren (wie z. Bsp. das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren) mit der Iterationsmatrix C, dem Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ und der zugehörigen Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Weiterhin nehmen wir an, dass

$$\|C\|_2 \leq q < 1.$$

Sei nun $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Startwert.

a) Zeigen, Sie dass die Abschätzung $\|x^{(k)} - x^*\|_2 \leq q^k \, \|x^{(0)} - x^*\|_2$ gilt.

b) Zeigen, Sie dass die Abschätzung $\|x^{(k)} - x^*\|_2 \leq \frac{q^k}{1-q} \, \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie für Teilaufgabe a), dass x^* der (einzige) Fixpunkt von $\phi(x) = Cx + d$ (d.h. $x^* = Cx^* + d$) und $\|Cx\|_2 \leq \|C\|_2 \|x\|_2$ (s.a. Definition B.2.10) zusammen mit der Dreiecksungleichung. Für Teilaufgabe b) kann man den Ansatz $x^* - x^{(0)} = x^* - x^{(1)} + x^{(1)} - x^{(0)}$ verwenden.

Aufgabe 18 *(Spektrum und Spektralradius der Standardmatrix)* (5+3+3 Punkte)
Wir betrachten die folgende $n \times n$ Tridiagonalmatrix

$$T_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & \\ & -1 & \alpha & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

wobei die Eintrage α der Diagonalen reell sind.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Matrix $T_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben sind durch

$$\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\theta), \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei $\theta = \frac{\pi}{n+1}$ und der Eigenvektor zum Eigenwert λ_j gegeben ist durch

$$v_j := \big(\sin(j\theta), \sin(2j\theta), \dots, \sin(nj\theta)\big)^\top.$$

Hinweis: Additionstheoreme.

Im Folgenden betrachten wir den Fall $\alpha = 2$.

b) Für die Konvergenzgeschwindigkeit des Jacobi-Verfahrens zur numerischen Lösung des linearen Gleichungssystems $T_2\,x = b$ ist der Spektralradius der Iterationsmatrix $C_J = I - D^{-1}T_2$ entscheidend ($T_2 = L+D+R$). Bestimmen Sie die Eigenwerte von C_J und den Spekralradius $\varrho(C_J)$ in Abhängigkeit von n. Was gilt für $n \to \infty$?

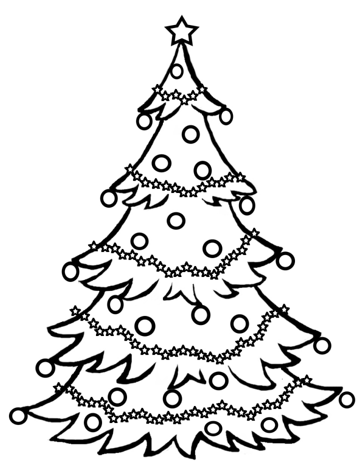
c) Für die Konvergenzgeschwindigkeit des Gradienten- und des cg-Verfahrens zur numerischen Lösung des linearen Gleichungssystems $T_2\,x = b$ ist die Konditionszahl $\kappa_2(T_2) := \|T_2\|_2 \cdot \|T_2^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ entscheidend, wobei $\lambda_{\max}$ bzw. $\lambda_{\min}$ den größten bzw. kleinsten Eigenwert von T_2 darstellen. Bestimmen Sie $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ und $\kappa_2(T_2)$ in Abhängigkeit von n. Was gilt für $n \to \infty$?

Aufgabe 19 *(Gradientenverfahren, LaTeX-Aufgabe)* (5 Punkte)

We consider the linear system (compare Bemerkung 4.6.5 ii) from the lecture notes)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{:=A} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b}.$$

with $a \gg 1$. As initial point for the gradient method we use $x^{(0)} = (a, 1)^\top$. Show that with the $k-th$ iterate $x^{(k)} = (x_k, y_k)^\top$ there holds $x^{(k+1)} = \rho \cdot (x_k, -y_k)^\top$, with $\rho = \frac{a-1}{a+1}$. (Hint: Use an induction argument.)



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!