Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Blatt 6

(**Abgabe** Mittwoch, 23.01.2013 **vor** den Theorie-Übungen in H2)

Hinweise:

- Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben.
- Es gibt jeweils sieben Theorie- und Matlab-Blätter. Auf den Theorie-Blättern können Sie insgesamt 192 Punkte erreichen, d.h., um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie im Theorieteil mindestens 96 Punkte erreichen.
- Von den sieben Matlab-Blättern sind nur sechs verpflichtend, es können auf den ersten sechs Blättern insgesamt 144 Punkte erreicht werden, d.h., um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie in diesem Teil mindestens 72 Punkte erreichen. Auf dem siebten Blatt, welches leider aus zeitlichen Gründen nicht mehr besprochen werden kann, können Sie Zusatzpunkte sammeln, welche ihnen auf ihre Gesamtpunktzahl im Matlabteil angerechnet wird.
- Zur Klausurzulassung sind vier Abgaben in LaTeX erforderlich (bitte im SLC unter Übungsblatt 8 prüfen).
- Bei der angezeigten Gesamtpunktzahl im SLC für Theorie-Übungsblätter ist (leider) die Anzahl der abgegeben LaTeX-Blätter mit eingerechnet.
- Bei den Klausuren (28.02.2013, 12:00-14:00 und 11.04.2013, 10:00-12:00) sind folgende Hilfsmittel erlaubt bzw. nicht erlaubt:
  - Ein eigenhändig, beidseitig, handschriftlich beschriebenes DINA 4 Blatt, welches zusammen mit der Klausur abgegeben werden muss.
  - Taschenrechner, Handys oder sonstige Hilfsmittel sind **nicht** erlaubt.

Aufgabe 20 *(Normalengleichung für unzuverlässige Messdaten)* (5* Punkte)

Hat man einzelne Meßdaten, die zuverlässiger sind als andere, so kann man dies dadurch berücksichtigen, dass man statt $\|Ax-d\|_2$ eine gewichtetet Quadratsumme $\|B(Ax-d)\|_2$ minimiert. Hierbei ist $B = \operatorname{diag}(b_{ii})$ eine Diagonalmatrix mit Elementen $b_{ii} > 0$. Wie lautet in diesem Fall das zugehörige Normalgleichungssystem?

Aufgabe 21 *(Lineares Ausgleichsproblem, LaTeX-Aufgabe)* (4+4 Punkte)

Gegeben seien zwei Vektoren $x, f \in \mathbb{R}^n$ von Messdaten. Die zwei skalare m^* und b^* seien definiert als

$$(m^*, b^*) = \text{argmin}_{m,b\in\mathbb{R}} \|T_{m,b}x - f\|_2$$

mit Tridiagonalmatrix

$$T_{m,b} = \begin{pmatrix} m & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & m & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & m & b \\ 0 & \dots & 0 & b & m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

a) Bringen Sie dies in die übliche Form eines linearen kleinste Quadrate Problems:

$$y^* = \text{argmin}_{y\in\mathbb{R}^k} \|Ay - d\|_2$$

mit geeignetem $A \in \mathbb{R}^{j\times k}, d \in \mathbb{R}^j$.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem für die Datenpaare $(x_1, f_1) = (0, -2), (x_2, f_2) = (1, -1), (x_3, f_3) = (2, 2), (x_4, f_4) = (3, 7)$.

Aufgabe 22 *(Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)* (5 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und Rang $A = n$. Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung $A = QR$ unter der Normierungsbedingung $r_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$ eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gebe zwei Zerlegungen $A = Q_1R_1$ und $A = Q_2R_2$ und zeigen Sie, dass $R_1 = R_2$ und $Q_1 = Q_2$. Verwenden Sie das Resultat von Aufgabe 11, dass die Inverse einer oberen/unteren Dreiecksmatrix wieder eine obere/untere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 23 *(QR decomposition, LaTeX-exercise)* (4+4+4 Punkte)

The QR decomposition plays an important part in numerical analysis. For a regular matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ we have to find an orthogonal matrix $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (q_i are the columns of Q) and an upper triangular matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ such that $A = QR$ holds.

a) Show the uniqueness of the vectors q_i up to the algebraic sign.

b) Via the Gram-Schmidt orthonormalization the matrices Q and R can be iteratively calculated by

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} \cdot q_i\,, \quad q_k = \frac{p_k}{\|p_k\|_2}\,, \quad r_{jk} = a_k^T q_j \quad \text{f¸r } 1 \leq j \leq k \leq n\,.$$

Use this method to compute the QR decomposition of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

c) How many floating point operations are needed to compute the QR decomposition of a regular matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, when the algorithm in (b) is used? Addition, subtraction, multiplication, and division are understood as one floating point operation. Count the number of square root operations separately.