Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Blatt 7

(**Abgabe** Mittwoch, 06.02.2013 **vor** den Theorie-Übungen in H2,
Rückgabe am 15.02.2013 in der Vorlesung)

- Bitte melden Sie sich bis spätestens zum **15.02.2013** im Hochschulportal für die **Vorleistung** zur Numerik 1 an. Ohne diese Vorleistung können Sie sich **nicht** zur Klausur anmelden.
- Für die Zulassung zur Klausur werden jeweils 50% der Punkte der Theorie-Übungsblätter (d.h. 96 Punkte) und der Matlab-Übungsblätter (d.h. 72 Punkte) als auch mindestens vier in LaTeX abgegebene Aufgaben vorausgesetzt. Bitte kontrollieren Sie Ihren aktuellen Punktestand im SLC (abgegebene LaTeX-Blätter finden Sie im SLC unter Übungsblatt 8)!
- Für Lehramtsstudenten, die sich nicht über das Hochschulportal zur Vorleistung/Klausur anmelden können, erfolgt die Anmeldung per Email an `sebastian.kestler@uni-ulm.de`.
- **Aktuelle Infos zur Klausur (z.B. Hörsaalaufteilung) finden Sie auf der Homepage.**
- In den Matlab-Übungen zu Blatt 6 wird es kein Praxisblatt geben. Stattdessen werden nochmals die wichtigsten Aspekte der vorangegangen Matlab-Blätter wiederholt.
- Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben.

Aufgabe 23 *(Ausgleichsproblem in der Chemie[1])* (4 Punkte)

In der Chemie beschreibt die *Arrhenius-Gleichung*

$$K = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit K von der Temperatur T, wobei A ein präexponentieller Faktor, R die allgemeine Gaskonstante und E die Aktivierungsenergie ist. Mittels eines Experiments sind Wertepaare (T_i, K_i) für $i \in \{1, \dots, m\}$ gemessen worden. Die allgemeine Gaskonstante R ist bekannt; nun sollen über die Methode der kleinste Quadrate A und E bestimmt werden. Formulieren Sie dieses Problem als *lineares* Ausgleichsproblem. Geben Sie zugehörige Matrizen und Vektoren an.

Aufgabe 24 *(Householder-Matrizen, LaTeX -Aufgabe)* (2+1+3+2+4 Punkte)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $P := I - 2\frac{\omega\omega^\top}{\omega^\top\omega}$.

a) Zeigen Sie, dass für $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Px = x\}$ gilt: $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega^\top x = 0\}$.

b) Berechnen Sie zu dem Vektor $\omega = (2, 3, 5)^\top$ die Householder-Matrix P.

c) Zeigen Sie, dass Px die Spiegelung von $x \in \mathbb{R}^n$ an der Hyperebene $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Px = x\}$ ist, d.h. (vgl. Bemerkung 5.5.3)

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R} : \quad Px = x + t\omega \text{ und } x + \tfrac{t}{2}\omega \in E.$$

Hinweis: Um den zweiten Teil der Aussage zu zeigen, setzen Sie $z := x + \frac{t}{2}\omega$ und berechnen Sie Pz. Verwenden Sie hierbei den ersten Teil der Aussage.

[1] Diese Aufgabe ist entnommen aus P. Deuflhard und A. Hohmann, *Numerische Mathematik 1*, deGryter, 2002.

d) Skizzieren Sie die Ebene E für den Householder-Vektor $\omega = (2,3)^\top$.

e) Gegeben seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $x^\top x = y^\top y$ und $x \neq y$. Bestimmen Sie eine Householder-Matrix P mit $Px = y$.

Aufgabe 25 *(QR-Zerlegung und Cholesky, LaTeX -Aufgabe)* (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $LL^\top = A^\top A$ eine Cholesky-Zerlegung von $A^\top A$. Zeigen Sie, dass dann mit $Q = A(L^\top)^{-1}$ und $R = L^\top$ eine QR-Zerlegung von A gegeben ist.

Aufgabe 26 *(Eigenschaften der Pseudo-Inversen)* (6 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Zeigen Sie, dass die Pseudo-Inverse A^+ von A folgende Eigenschaften besitzt (vgl. Lemma 5.6.5):

a) $(A^+A)^\top = A^+A$, $(AA^+)^\top = AA^+$.

b) $A^+AA^+ = A^+$.

c) $AA^+A = A$.

d) Falls A vollen Rang hat, gilt $A^+A = I$ (wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet).

Aufgabe 27 *(Minimaleigenschaft der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung)* (4+7* Punkte)
Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$,

$$U = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad V = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p),$$

wobei $p := \min\{m, n\}$ und die Singulärwerte erfüllen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$. Wir bezeichnen mit $r := \mathrm{rang}(A)$ den Rang von A, so dass für die Singulärwerte gilt $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Für $0 < k < r$ definieren wir

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\top.$$

Wir wollen zeigen, dass A_k die beste Approximation vom Rang k ist. Zeigen Sie hierzu:

a) $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

b) $\|A - A_k\|_2 = \min\{\|A - B\|_2 : B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathrm{rang}(B) \leq k\}$.

Hinweis zu Teil b): Argumentieren Sie über einen Widerspruchsbeweis in dem Sie annehmen, dass $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{rang}(B) \leq k$ existiert und $\|A - B\|_2 < \sigma_{k+1}$ erfüllt.