Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger,
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

ulm university universität uulm

Numerik 1

Matlab-Blatt 2
(**Abgabe** wie auf dem ersten Matlab-Übungsblatt beschrieben
bis Dienstag 20.11.2012, 24:00 per Email)

Aufgabe 3 *(Recurrence)* (15 Punkte)

The solution for this problem has to be turned in in LaTeX. Consider the recurrence

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{13}{3}x_n - \frac{4}{3}x_{n-1}. \tag{1}$$

In the tutorial it was shown that $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Download the script `main1.m` from the homepage and complete the following steps:

a) Given $N \in \mathbb{N}$, calculate the values x_n with (1) and $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ for $n = 0, \dots, N$. The values of x_n are stored in the vector `x` and the vector `ex` contains the values of $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Furthermore, for each `k` calculate the relative error and store the values in the vector `err`.
(The values of `x`, `ex` and `err` are written in the file results.tex, see lines 16-20 and 27.)

b) Display your results in an appropriate way (lines 34-49). Insert titles and legends and label the axes of the figures. Save the figure as eps-file.

c) Use the template aufg3.tex to write up the solution of the problem. Include the code, the results saved in the file results.tex and the eps-picture. Since the program-code is already included in the pdffile it doesn't have to be printed separately.

Aufgabe 4 *(Numerische Berechnung der 2-Norm für Matrizen)* (12 Punkte)

Berechnen Sie näherungsweise die 2-Norm für 3×3-Matrizen mit Hilfe der Formel $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$. Um das Supremum zu bestimmen diskretisieren wir die Einheitssphäre mit Kugelkoordinaten und bestimmen das Maximum über die diskrete Menge.
Laden Sie dazu das Skript `main2` und die Funktion `norm2` herunter und gehen Sie wie folgt vor:

a) Schreiben Sie eine Funktion `norm2`, die als Input eine 3×3-Matrix und einen Parameter $n \in \mathbb{N}$ erhält und $\max\limits_{x \in D_n} \|Ax\|_2$ ausgibt. D_n ist hierbei gegeben durch $D_n = M_n \cup \{(0,0,-1),(0,0,1)\}$ mit

$$\begin{aligned} M_n := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x &= \sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi \ell}{n}, \\ y &= \sin\frac{\pi k}{n}\sin\frac{\pi \ell}{n}, \\ z &= \cos\frac{\pi k}{n};\ k = 1,\dots,n-1;\ \ell = 0,\dots,2n-1 \Big\}. \end{aligned}$$

Speichern Sie alle Punkte in D_n in einer $n \times 3$-Matrix `points` (Zeilen 8-18). Berechnen Sie dann `b` = (`A`·`points`)' (Zeile 21). (In jeder Zeile von `b` steht jetzt Ax für einen Punkt $x \in D_n$.) Bestimmen Sie für jede Zeile von `b` die euklidische Norm (verwenden Sie dazu nicht die Matlab-Funktion `norm`) und schließlich das Maximum über alle Normen (Zeilen 25f).

b) Ergänzen Sie das Skript `main2`, das den relativen Fehler

$$\frac{\|A\|_2 - \texttt{norm2(A,2\^{}k)}}{\|A\|_2}$$

für $k = 1, \ldots, 10$ berechnet (zur Berechnung von $\|A\|_2$ dürfen Sie `norm(A,2)` verwenden) und diesen graphisch auf einer doppelt logarithmischen Skala darstellt (Abszisse = n-Werte). Veranschaulichen Sie an der Graphik, dass die Formel

$$\frac{\|A\|_2 - \texttt{norm2(A,n)}}{\|A\|_2} \le \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

gilt. Verwenden Sie als Testmatrix `hilb(3)`. Achten Sie auf saubere Achsenbeschriftungen, Titel und Legenden.