Prof. Dr. Karsten Urban

Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Sebastian Kestler

Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2012/13

Numerik 1

Matlab-Blatt 3
Abgabe wie auf dem ersten Matlab-Übungsblatt beschrieben
bis Dienstag, 4.12.2012, 24:00 Uhr per Email (s.u.)

Aufgabe 5 *(Cholesky-Zerlegung für Bandmatrizen)* (4+5+4+5 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist die Implementierung des Cholesky-Verfahrens für symmetrisch positiv definite (s.p.d.) Matrizen, um lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ numerisch zu lösen. Dabei nehmen wir weiter an, dass A eine **Bandmatrix** mit **Bandbreite** $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ ist (s.a. Definition 3.7.1).

a) Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ als Matlab-Funktion `L=cholesky(A)` wie sie im Skript auf S. 49 beschrieben ist ohne dabei die Bandstruktur von A auszunutzen. Verwenden Sie diese Zerlegung, um $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen zu lösen.

b) Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ als Matlab-Funktion `L=cholesky_band(A,m)` wie sie im Skript auf S. 52 beschrieben ist und nutzen Sie dabei die Bandstruktur von A aus. Verwenden Sie diese Zerlegung, um $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen zu lösen, wobei auch hier die Bandstruktur von L explizit ausgenutzt werden soll. Hinweis: Zur Optimierung des Speicheraufwands sollten hier *schwach besetzte* Matrizen A und L in Matlab verwendet werden, Stichworte `sparse` und `spdiags` (s.a. Programmrumpf).

c) Vergleichen Sie Ihre Implementierungen aus a) und b) hinsichtlich der Laufzeiten, die für das Lösen von $Ax = b$ über die Cholesky-Zerlegung benötigt werden. Plotten Sie dazu die Dimension n des linearen Gleichungssystems gegen die Rechenzeit. Was beobachten Sie hinsichtlich der Abschätzungen des Rechenaufwands aus den Sätzen 3.6.10 und 3.7.6?

d) Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung unter Verwendung der speziellen Speicherstruktur wie sie im Skript in Abb. 3.3 auf S. 51 skizziert ist als Matlab-Funktion `L=cholesky_band2(A)`. Zur Veranschaulichung betrachten wir als weiteres Beispiel eine symmetrische Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Bandbreite $m = 2$: Unter Verwendung der Symmetrie können hier die Einträge auf der Diagonalen sowie auf den Nebendiagonalen von A wie folgt gespeichert werden:

$$A = \begin{pmatrix} D^0_{11} & D^1_{21} & D^2_{31} & 0 & 0 \\ D^1_{21} & D^0_{22} & D^1_{32} & D^2_{42} & 0 \\ D^2_{31} & D^1_{32} & D^0_{33} & D^1_{43} & D^2_{53} \\ 0 & D^2_{42} & D^1_{43} & D^0_{44} & D^1_{54} \\ 0 & 0 & D^2_{53} & D^1_{54} & D^0_{55} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A_{diags} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & D^0_{11} \\ 0 & D^1_{21} & D^0_{22} \\ D^2_{31} & D^1_{32} & D^0_{33} \\ D^2_{42} & D^1_{43} & D^0_{44} \\ D^2_{53} & D^1_{54} & D^0_{55} \end{pmatrix}.$$

Analog bedeutet das, dass die Einträge einer symmetrischen Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Bandbreite m als eine Matrix $A_{diags} \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$ gespeichert werden können. Bei Ihrer Implementierung sollen sowohl A als auch L ausschließlich in diesem Speicherformat verwendet werden.

Hinweis: Material zu dieser Aufgabe inklusive eines Programmrumpfs mit Testfällen finden Sie auf der Homepage.

Aufgabe 6 *(Richardson-Iteration)* (3+4 Punkte)

In this problem we want to determine the optimal parameter ω for the Richardson iteration

$$x_{k+1} = x_k - \omega(Ax_k - b) = (I - \omega A)x_k + \omega b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

with a numerical experiment. In order to do so, perform the following steps:

a) Write a function `x = richardson(A, b, x0, omega, N)` which computes `N` steps of the Richardson iteration for the linear system $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $b, x \in \mathbb{R}^n$) using `x0` as the initial vector and which returns the solution `x`$=x_N$ of the Richardson iteration after `N` steps.

b) In the materials for this problem you are given the matrix `A`, the vector `b` and the initial vector `x0`. Now proceed as follows:

   1) Compute the solution x of the linear system $Ax = b$ numerically using the backslash operator.
   2) Initialize a vector with 200 equidistant values for `omega` ranging from 0.25 to 0.45.
   3) Compute the solution of the Richardson iteration x_{20} after `N` $= 20$ steps and the error $\|x_{20} - x\|_2$ for each value of ω (use `norm` to compute the norm of the error).
   4) Plot the errors over the values of `omega`. What do you observe? (The optimal choice of ω is part of Aufgabe 4.2.4 in the lecture notes and will also be subject on the next exercise sheet (theory).)

Hinweis: Material zu dieser Aufgabe finden Sie auf der Homepage.