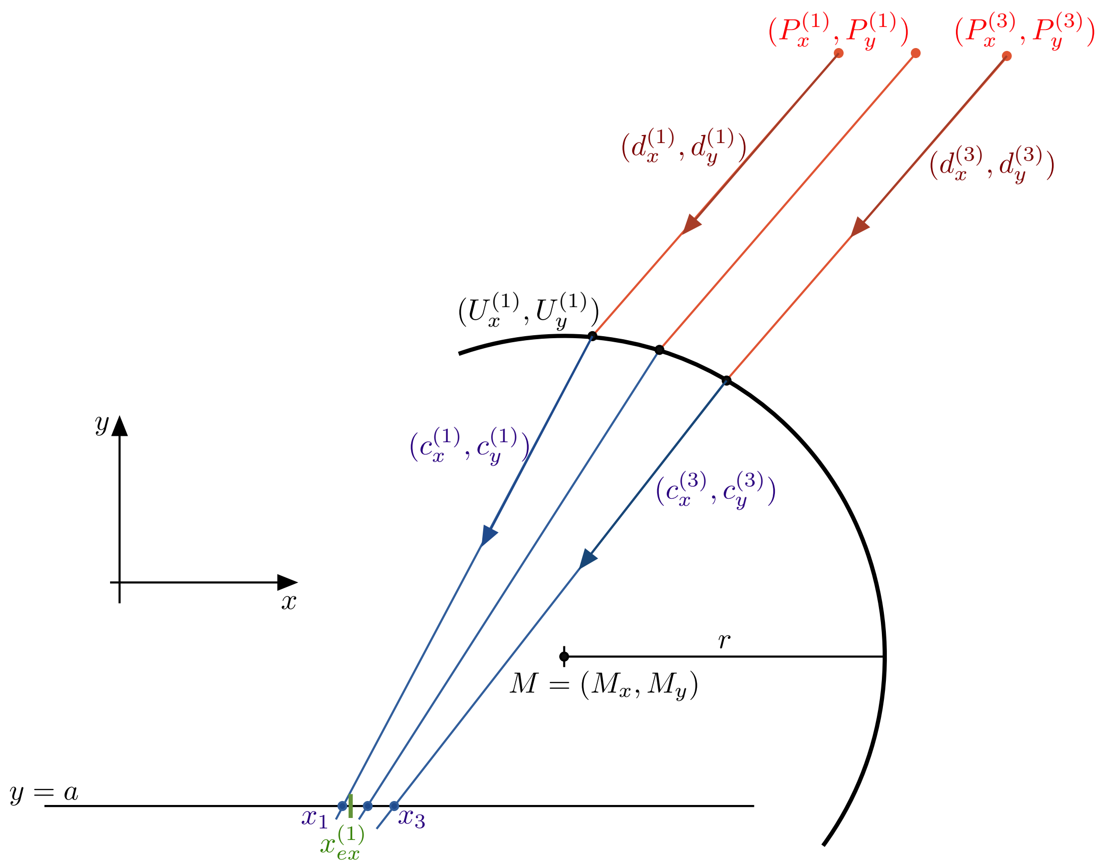
Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 1

(Besprechung Mo. 22.10. / 29.10. 2012)

In der ersten Übung wollen wir uns mit der Brechung von Licht an einer sphärischen Oberfläche beschäftigen.



Lichstrahlen ausgehend von Punkten $P^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ treffen auf die sphärische Oberfläche, welche durch einen Mittelpunkt $M = (M_x, M_y)$ und einen Radius r gegeben ist. Die Richtung der Lichtsrahlen wird dabei durch Vektoren $d^{(i)}$ $i = 1, \dots, n$ gegeben. Die Schnittpunkte der Lichtstrahlen mit der Oberfläche sind mit $U^{(i)} = (U_x^{(i)}, U_y^{(i)})$ bezeichnet. An der Oberfläche werden die Lichtstrahlen gebrochen. Die Richtungen der Lichtstrahlen nach der Brechung sind durch die Vektoren $c^{(i)} = (c_c^{(i)}, c_y^{(i)})$ gegeben. Schließlich treffen die Lichtstrahlen auf die Ebene $y = a$. Es ist gewünscht, dass die Lichtstrahlen die Ebene $y = a$ in den Punkten $x_{ex}^{(i)}$ schneiden.
Ziel ist es nun, die Parameter der sphärischen Oberfläche r und M so zu optimieren, dass der Fehler zwischen den Schnittpunkten der Lichtstrahlen $x^{(i)}$ und den gewünschten Schnittpunkten $x_{ex}^{(i)}$ minimiert wird.

Um dieses nichtlineare Problem zu lösen, bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1 *(Schnittpunkt eines Lichtstrahls mit einer Sphäre - **bis 22.10.**)*

Berechnen Sie analytisch den Schnittpunkt $U = (U_x, U_y)$ eines Lichtstrahls mit der oberen Hälfte eines Kreises. Der Lichtstrahl ist hierbei durch den Punkt $P = (P_x, P_y)$ und den Richtungsvektor $d = (d_x, d_y)$ gegeben. Überlegen Sie sich hierzu wie man den oberen Teil einer Sphäre als Funktion $f(x)$ in Abhängigkeit des Mittelpunkts $M = (M_x, M_y)$ und des Radius r schreiben kann. (Hinweis: Die Lagrange Identität $a^T b \cdot a^T b - a^T a \cdot b^T b = (b \times a)(a \times b)$ vereinfacht die Rechnung)
Ergebnis: $U = (P_x, P_y)^T + \lambda(d_x, d_y)^T$, mit

$$\lambda = \frac{-d^T(P - M) \pm \sqrt{r^2 d^T d - [(P - M) \times d]^2}}{d^T d}$$

Aufgabe 2 *(Normalenvektor im Schnittpunkt - **bis 22.10.**)*

Berechnen Sie den äußeren normierten Normalenvektor n an den Kreisbogen in einem Punkt $(x, f(x))$ in Abhängigkeit von r und M.

Aufgabe 3 *(Austretender Strahl - **wird am 22.10. während der Übung bearbeitet!**)*

Berechnen Sie den Richtungsvektor $c = (c_x, c_y)$ des austretenden Strahls. Verwenden Sie hierzu das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{n_2}{n_1} =: k$$

wobei k gegeben sei. Bestimmen Sie den Vektor c, indem Sie den Normalenvektor n aus Aufgabe 2 mit einer passenden Drehmatrix drehen (Skizze!). Betrachten Sie auch den Fall der Totalreflexion.

Aufgabe 4 *(Matlab Teil 1 - **wird am 22.10. während der Übung programmiert!**)*

Schreiben Sie eine Funktion

```
function [U,c] = austretender(M,r,P,d,k)
```

welche folgende Eingabeparameter erwartet:

- Den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises .
- Den Stützpunkt P und den Richtungsvektor r des eintreffenden Lichtstrahls.
- Den Brechungsindex k (siehe Aufgabe 3).

Die Funktion soll dann den Schnittpunkt des eintreffenden Strahls mit der Sphäre sowie den austretenden Strahl berechnen und diese in den Vektoren U und c zurückgeben. Fangen Sie Fälle ab, in denen es keinen Schnittpunkt bzw. keinen austretenden Strahl gibt (Totalreflexion).

Aufgabe 5 *(Schnittpunkt mit der Ebene $y = a$ - **bis 29.10.**)*

Bestimmen Sie den Schnittpunkt des austretenden Strahls mit der Ebene $y = a$ in Abhängigkeit von U und c.

Aufgabe 6 *(Matlab Teil 2 - **bis 29.10.**)*

Schreiben sie eine Funktion

```
function e = g(M,r,P,d,k,a,x_ex)
```

welche folgende Eingabeparameter erwartet:

- Den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises .
- Die Stützpunkte P und die Richtungsvektoren r der eintreffenden Lichtstrahlen.
- Den Brechungsindex k.
- Die y-Koordinate a der Schnittebene für die austretenden Strahlen.
- Die x-Koordinate des gewünschten Schnittpunktes x_{ex}.

Hierbei sind P und d jeweils $2 \times n$-Matrizen (jede Spalte gehört zu einem eintreffenden Lichtstrahl). Der Vektor x_{ex} enthält für jeden eintreffenden Strahl den Wert des gewünschten exakten Schnittpunktes mit der Ebene $y = a$, ist also ein $n \times 1$-Vektor.
Die Funktion soll dann für jeden eintreffenden Lichtstrahl (gegeben durch P_i, d_i) den Schnittpunkt x_i des austretenden Lichtstrahls mit der Ebene $y = a$ berechnen und den Fehler $e_i = x_{ex,i} - x_i$ zurückgeben. Der Rückgabewert der Funktion ist also ein $n \times 1$-Vektor.
Zusatzaufgabe:
Zeichnen Sie die Sphäre sowie jeden eintretenden und den zugehörigen austretenden Lichtstrahl in eine Grafik.

Aufgabe 7 *(Matlab Teil 3 - **bis 29.10.**)*

Schreiben Sie eine Funktion

```
function De = Dg(M,r,P,d,k,a,x_ex).
```

Die Funktion erhält die selben Eingabeparameter wie die Funktion g und berechnet für jeden eintreffenden Lichtstrahl den Gradienten der Funktion g, also

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial M_x} \\ \frac{\partial g}{\partial M_y} \\ \frac{\partial g}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Eine partielle Ableitung wird hierbei mit Hilfe des Differenzenquotienten

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{g(x + he_k) - g(x - he_k)}{2h}$$

bestimmt. Verwenden Sie im Programm $h = 1e - 6$. Der Ausgabeparameter der Funktion ist eine $3 \times n$ Matrix.

Es soll nun das Gauss-Newton Verfahren für das oben beschriebene nichtlineare Ausgleichsproblem implementiert werden.

(a) Vervollständigen Sie dazu das Skript runGaussNewton.m, welches Sie auf der Vorlesungshomepage finden. Zum Lösen der linearen Ausgleichsproblems in jedem Schritt dürfen Sie die Matlab-Funktion *qr* verwenden (Siehe Matlab Hilfe).

(b) Ändern Sie die Startwerte für M und r sowie die eintretenden Strahlen etwas ab und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.