Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 3
WS 12/13

Übungsblatt 2

(Besprechung Mo. 29.10. 2012)

Aufgabe 8 *(Reelle Schur-Zerlegung)*

Zeigen Sie, dass jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Schur-Zerlegung besitzt, d.h. es existiert eine orthonormale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sodass

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & * \\ 0 & B_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B_j \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots B_j) + N$$

wobei die Blöcke B_k entweder die Form

$$B_k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

haben oder $B_k \in \mathbb{R}$ ist. N ist die durch Sternchen angedeutete rechte obere Dreiecksmatrix. Was für Aussagen lassen sich weiterhin über die Matrix N treffen ?

Aufgabe 9 *(Anwendung der Schur-Zerlegung)*

Zeigen Sie für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine induzierte Norm $||\cdot||$ die Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} ||A^n|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho(A) < 1.$$

Hierbei bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius von A.
Bemerkung: Sie können diese Aussage ebenfalls für die Frobenius Norm zeigen.

Aufgabe 10 *(Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen)*

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Form

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie dass für die Determinante $d_n = det(A_n)$ gilt

$$d_n = a\, d_{n-1} - b\, c\, d_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Wir setzen hier $d_{-1} = 0$ und $d_0 = 1$

(b) Folgern Sie aus Teil (a), dass die Matrix $A_n(2,-1,-1)$ positiv definit sind.

(c) Zeigen Sie durch einsetzen (ohne Teil (a) oder (b)), dass die Matrix $A_n(a,b,c)$ mit $a \cdot c > 0$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\,\operatorname{sgn}(c)\cos(\frac{k\pi}{n+1}), \qquad 1 \leq k \leq n$$

besitzt und dass die ℓ-te Komponente des Eigenvektors $v^k \in \mathbb{R}^n$ zum Eigenwert λ_k folgende Darstellung besitzt:

$$v^k_\ell = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} \sin\left(\frac{k\pi\ell}{n+1}\right), \qquad 1 \leq k \leq n, 1 \leq \ell \leq n.$$

Aufgabe 11 *(Sturm-Liouville)*

Wir betrachten das Sturm-Liouville Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) - \lambda u(x) &= 0 \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie zunächst, dass für $\lambda = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen $u_k(x) = \sin(kx)$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Diskretisiert man diese Gleichung mit der Methode der Finiten Differenzen mit $n+1$ Gitterpunkten, so erhält man ein Eigenwertproblem der Form$Ax = \lambda x$ mit

$$A = \frac{n^2}{\pi} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

(Dies wurde in der Vorlesung gezeigt, machen Sie sich dies nochmal klar!) Berechnen Sie nun für $n \in \{4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$ die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A mit Matlab (Funktion `eig`) und zeichnen Sie für die drei kleinsten Eigenwerte jeweils $\lambda_k - (k^2)$ über n in ein Schaubild. Was stellen Sie fest? Zeichnen Sie für $n = \{4, 8, 16\}$ die dritte Eigenfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$.