Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 3
WS 12/13

Übungsblatt 3

(Besprechung Mo. 12.11. 2012)

Aufgabe 12 *(Rayleigh-Quotient)*

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A symmetrisch ist, und $x \in \mathbb{R}^n$ ist der Rayleigh-Quotient definiert als $r(x) = \dfrac{x^T A x}{x^T x}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\nabla r(x) = \dfrac{2}{x^T x}\,(Ax - r(x)x)$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Für einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ von A gilt:

$$|r(x) - r(v)| = \mathcal{O}\left(||x - v||^2\right) \quad \text{für } x \to v.$$

Was lässt sich daraus folgern ?

Aufgabe 13 *(Eigenwerte von Block-Matrizen)*

Beweisen Sie: Für

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & T_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $T_{ii} \in R^{n_i \times n_i}$ (die Dimensionen von T_{ij} entsprechend gewählt) gilt $\sigma(T) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_{i,i})$.

Aufgabe 14 *(Matlab: Abschätzen von Eigenwerten)*

Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -2 & 1-2i & 0 \\ 3 & 5 & 2 & i \\ 1 & 4-4i & 6 & 8i \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Illustrieren Sie die folgenden Abschätzungen für die Eigenwerte von A bzw. B sowie die Eigenwerte selbst in einer gemeinsamen Grafik (eine Grafik für A und eine Grafik für B):

- Eigenwerte (verwenden Sie die Matlab Funktion *eig*)
- Gerschgorin Kreise
- Bendixon-Rechteck
- Wertebereich $W(A)$. Bestimmen Sie dazu den Rayleigh-Quotienten für eine ausreichend große Anzahl von zufälligen komplexen Vektoren.

Aufgabe 15 *(Matlab)*

In der Vorlesung wurde für eine $n \times n$ Matrix A die Abbildung $A_t := D + t(A - D)$ für $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ und $t \in [0,1]$ definiert (im Beweis des zweiten Gerschgorin Theorems). Wir wollen nun die Behauptung, dass die Eigenwerte von A_t stetig bezüglich t sind, mit Matlab "nachprüfen". Zeichnen Sie hierfür die Eigenwerte von A_{t_i} für die Matrizen

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -7 & 1 \\ -6 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

und äquidistante Punkte $t_i \in [0,1]$ in der komplexen Ebene. Zeichnen Sie zusätzlich die Eigenwerte von $A_t^{(i)}$ über t (je ein Schaubild für Real- und Imaginärteil).