Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 3
WS 12/13

Übungsblatt 4

(Besprechung Mo. 19.11. 2012)

Aufgabe 16 *(Matlab: Potenzmethode - wird am 12.11. in der Übung bearbeitet)*

(a) Schreiben Sie eine Funktion `function [lambda,v]=potmethod(A,x,tol)`, welche die Potenzmethode für die Matrix A mit Startvektor x und Toleranz tol ausführt. Verwenden Sie tol um ein geeignetes Abbruchkriterium zu realisieren.

(b) Testen Sie die Funktion aus Teil (a) für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 9 \\ -6 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dazu zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der Matlab Funktion `eig`.

(c) Die Datei `A16c.mat` enthält zwei Matrizen A und B. Berechnen Sie für beide Matrizen den betragsgrößten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor mit Hilfe der Funktion aus Teil (a). Tragen Sie den Fehler $|\rho^{(k)} - \lambda_1|$ über der Anzahl der Iterationen auf und bestimmen Sie den Konvergenzfaktor (λ_1 ist hierbei der betragsgrößte Eigenwert, den Sie mit Hilfe der Funktion `eig` bestimmen können). Vergleichen Sie den numerisch bestimmten Konvergenzfaktor mit dem theoretischen Konvergenzfaktor aus Bemerkung 2.3.2 iii).

(d) Führen Sie 60 Iterationen der Potenzmethode für A = diag(1,2,3) mit Startvektor $x_0 = (10^4, 10^2, 10^{-2})^T / \sqrt{10^8 + 10^4 + 10^{-4}}$ durch und zeichnen Sie $\rho^{(k)}$ über k. Erklären Sie was Sie sehen.

Aufgabe 17 *(A posteriori Fehlerschranken und Abbruchkriterien)*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Seien λ ein einfacher Eigenwert von A und x bzw. y der zugehörige normierte rechts- bzw. links-Eigenvektor, d.h.

$$Ax = \lambda x \qquad y^H A = \lambda y^H.$$

Sei weiterhin für $\varepsilon > 0$ $A(\varepsilon) = A + \varepsilon E$ eine gestörte Matrix mit $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $||E||_2 = 1$. Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von $A(\varepsilon)$ seien mit $\lambda(\varepsilon)$ bzw. $x(\varepsilon)$ und $y(\varepsilon)$ bezeichnet. Man kann dann zeigen, dass

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon}(0) \right| \leq \frac{1}{\cos(\theta_\lambda)}$$

wobei θ_λ der Winkel zwischen den beiden Eigenvektoren x und y ist.

(a) Erklären Sie folgende Aussage: Sind x und y nahezu orthogonal, so ist die Berechnung des Eigenwerts λ schlecht konditioniert.

Wir wollen nun ein Abbruchkriterium für die Potenzmethode herleiten:

(b) Zeigen Sie

$$|\lambda_1 - \rho^{(k)}| \approx \frac{||r^{(k)}||_2}{|cos(\theta_{\lambda_1})|} =: \eta^{(k)},$$

wobei $r^{(k)} = Ax^{(k)} - \rho^{(k)} x^{(k)}$ das Residuum im k-ten Schritt und λ_1 der betragsgrösste Eigenwert ist.
Definieren Sie dazu die Matrix $\varepsilon E_k = -r^{(k)} x^{(k)}$ mit $||E_k||_2 = 1$ und zeigen Sie zunächst, dass $\rho^{(k)}$ der Eigenwert der gestörten Matrix $A + \varepsilon E_k$ ist. Verwenden Sie dann obige Aussage und ersetzen Sie die partielle Ableitung durch den Differenzenquotienten

$$\frac{|\lambda_1 - \rho^{(k)}|}{\varepsilon}.$$

Um die eben bewiesene Aussage in der Praxis anwenden zu können, müssen wir den Cosinus-Term etwas umschreiben. Es gilt $\cos(\theta_{\lambda_1}) \approx (x^{(k)})^H(y^{(k)})$, wobei $x^{(k)}$ die Approximation für den rechts-Eigenvektor x zu λ_1 ist und $y^{(k)}$ die Approximation zum links-Eigenvektor y ist.

(c) Modifizieren Sie ihr Programm aus Aufgabe 16 so, dass es neben den rechts-Eigenvektoren auch die links-Eigenvektoren berechnet und verwenden Sie das eben hergeleitete Abbruchkriterium. Testen Sie die Funktion mit den Daten in `A16c.mat`. Stellen Sie $\eta^{(k)}$ sowie den Fehler in einer geeigneten Grafik dar.

Aufgabe 18 *(Matlab: Inverse Potenzmethode)*

(a) Laden sie die Funkion `myLuCols.m`, die eine LU-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung durchführt, von der Homepage herunter und modifizieren Sie diese so, dass sie für die inverse Iteration verwendet werden kann (siehe Bemerkung 2.4.2).

(b) Schreiben Sie eine Funktion `[lambda,v, R]=invIteration(A,x,mu,tol,maxit)`, die die inverse Iteration nach Wielandt durchführt. Die Eingabeparameter sind hier

- `A`: Matrix, deren Eigenwert bestimmt werden soll
- `x`: Startvektor
- `mu`: Näherung des Eigenwerts, der bestimmt werden soll
- `tol`: Toleranz für das Abbruchkriterium
- `maxit`: Maximale Anzahl von Iterationen

Die Rückgabewerte sind

- `lambda`: Näherungswert für den gesuchten Eigenwert
- `v`: Zugehöriger Eigenvektor
- `R`: Vektor, der die $\rho^{(k)}$ für jeden Iterationsschritt enthält.

Testen Sie ihre Funktion mit den Daten, die in der Datei `A1bb.mat` gespeichert sind und stellen Sie den Fehler in einer passenden Grafik dar.

(c) Schreiben Sie eine Funktion `[lambda,v, R]=invIterationAdap(A,x,mu,tol,maxit)`, die die inverse Iteration durchführt. Hierbei soll `mu` in jedem Schritt angepasst werden (siehe Skript S. 24 unten). Testen Sie ihre Funktion wieder mit den Daten aus `A18b.mat`. Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit (bzgl. der Anzahl der Iterationen und bzgl. der Zeit) mit der Funktion aus Teil (b).