

Übungsblatt 6 (Besprechung Fr. 3.12. 2012)

Aufgabe 23 (Matlab QR-Algorithmus mit einfachem Shift)

Die Grundform des QR-Algorithmus mit einfachem Shift ist gegeben durch:

```
INPUT:  $\mu \in \mathbb{R}$  fest,  $H^{(0)}$  Hessenbergform von  $A$ .  
FOR  $k = 1, 2, \dots$   
. bestimme  $H^{(k-1)} - \mu I = Q^{(k)} R^{(k)}$  (QR-Zerlegung von  $H^{(k-1)} - \mu I$ )  
. setze  $H^{(k)} := R^{(k)} Q^{(k)} + \mu I$   
END
```

- (a) Zeigen Sie: Ist μ ein Eigenwert einer unreduzierten Hessenberg-Matrix $H^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist nach einem QR-Schritt mit Shift μ $h_{n,n-1}^{(1)} = 0$ und $h_{n,n}^{(1)} = \mu$ wobei $h_{i,j}^{(1)}$ die Einträge der Matrix $H^{(1)}$ sind.

Diese Aussage motiviert zu folgender Heuristik:

Wählt man $\mu = h_{n,n}^{(k)}$, so konvergiert $h_{n,n-1}$ gegen 0 und $h_{n,n}^{(k)}$ konvergiert gegen einen Eigenwert von A . Damit können wir einen Deflationsalgorithmus zur Berechnung aller Eigenwerte von H formulieren:

```
INPUT: Hessenbergform von  $A: H$ , Toleranz:  $\epsilon$ , maximale Anzahl an Iterationen: maxit.  
iter = 0  
FOR  $k = n : -1 : 2$   
. WHILE  $|H_{k,k-1}| > \epsilon(|H_{k,k}| + |H_{k-1,k-1}|)$   
. . iter = iter + 1  
. . IF (iter > maxit) return; END  
. .  $\mu = H_{k,k}$   
. . bestimme  $H_{1:k,1:k} - \mu I_k = QR$  (QR-Zerlegung)  
. . setze  $H_{1:k,1:k} := RQ + \mu I_k$   
. END  
END
```

Hierbei ist $H_{1:k,1:k}$ der $k \times k$ Block links oben in H und I_k die $k \times k$ Einheitsmatrix.

- (b) Erklären Sie die Funktionsweise des Algorithmus an Hand einer 5×5 Hessenberg-Matrix H mit "Sternchen-Matrix-Bildern".
- (c) Schreiben Sie eine Funktion `[H] = hessQrShift(H, epsilon, maxit)`, die obigen Deflationsalgorithmus für eine Matrix in Hessenbergform durchführt. Die QR-Zerlegung in jedem Schritt soll hierbei mit Hilfe von Givens-Rotationen durchgeführt werden. Achten Sie darauf nur die nötigen Informationen abzuspeichern. Sie dürfen die Funktionen `gaRow`, `gaCol`, `givCos` und `qrGivens` verwenden (Homepage).
- (d) Schreiben Sie ein Skript `main.m`, in dem Sie ihre Funktion aus Teil (c) für eine zufällige, symmetrische Matrix testen.

Aufgabe 24 (Matlab QR-Algorithmus mit doppeltem Shift)

Gegeben Sei die Hessenberg Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für das QR-Verfahren suchen wir

$$\begin{aligned} H - a_1 I &\rightarrow U_1 R_1 \\ H_1 &= R_1 U_1 + a_1 I \\ H_1 - a_2 I &\rightarrow U_2 R_2 \\ H_2 &= R_2 U_2 + a_2 I, \end{aligned}$$

wobei $a_1 = h_{n,n}$ und $a_2 = h_{n-1,n-1}$ zwei Shifts sind.

