Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 7

(Besprechung Mo. 10.12. 2012)

Aufgabe 25 *(Sturmsche Ketten)*

Es sei

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, \; x < 0 \\ 0, \; x = 0 \\ 1, \; x > 0 \end{cases}$$

Die Polynome p_i mit $i = 0, \ldots, m$ bilden eine Sturmsche Kette, wenn gilt

(i) p_0 besitzt nur einfache Nullstellen.

(ii) Ist $\xi \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p_0, dann gilt: $\operatorname{sign} p_1(\xi) \neq \operatorname{sign} p_0'(\xi)$.

(iii) Ist $\xi \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p_i, dann gilt: $\operatorname{sign} p_{i+1}(\xi) \cdot \operatorname{sign} p_{i-1}(\xi) = -1$.

(iv) p_m besitzt keine reellen Nullstellen.

Es sei p ein Polynom, dass nur einfache Nullstellen besitzt. Wählen Sie $p_0 = p, \; p_1 = -p'$ und bestimmen Sie $p_i \not\equiv 0$ für $i > 0$ durch Polynomdivision so, dass

$$p_{i-1}(x) = q_i(x)p_i(x) - p_{i+1}(x), \; \deg p_{i+1} < \deg p_i.$$

Zeigen Sie, dass die p_i für $i = 0, \ldots, m$ mit geeignetem m eine Sturmsche Kette bildet.
Hinweis: Gilt für ein m, dass $p_{m+1} \equiv 0$ dann ist $p_m(x)$ der größte gemeinsame Teiler von $p_0(x)$ und $p_1(x)$.

Aufgabe 26 *(Sturmsche Ketten und Eigenwerte)*

Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Tridiagonalmatrix mit Diagonaleinträgen a_i, $i = 1, \ldots n$ und Nebendiagonaleinträgen b_i, $i = 1, \ldots n-1$ und $T_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ sei die r-te Hauptminore von T. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für die Polynome $p_r(x) = det(T_r - xI_r)$ (I_r bezeichne die $r \times r$ Einheitsmatrix) folgende Rekursion gilt:

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1 \\ p_1(x) &= a_1 - x \\ p_r(x) &= (a_r - x)p_{r-1}(x) - b_{r-1}^2 p_{r-2}(x) \quad r = 2, \ldots n \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie eine Funktion, die alle Polynome p_r and einer Stelle x auswertet (`poly_sturm.m`).
Bemerkung: Speichern Sie bei symmetrischen Tridiagonalmatrizen nur die Diagonalen und bauen Sie ihre Implementierung darauf auf!

(b) Schreiben Sie eine Funktion, die die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Polynomfolge zurück liefert (`sign_sturm.m`.)
Bemerkung: Berücksichtigen Sie, dass eine Folge $(-1, 0, 1)$ nur einen Vorzeichenwechsel hat!

(c) Schreiben Sie eine Funktion `eigk = eigSturm(alpha,beta,k,tol)`, die den `k`-ten Eigenwert der Matrix T mittels Sturmscher Ketten und Bisektion berechnet. `alpha` bzw. `beta` sind dabei Vektoren, die die Diagonal- bzw. Subdiagonaleinträge der Matrix T enthalten. `tol` ist die Toleranz für die Bisektion.

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Routinen den größten und den kleinsten Eigenwert der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots 0 & \\ 1 & -2 & 1 & \cdots 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

für verschiedene n und analysieren Sie die Laufzeiten in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 27 *(Lanczos Verfahren)*

(a) Vervollständigen Sie das Skript `Aufg27.m`, in dem für eine Matrix A die Lancos-Iteration durchgeführt wird. Berechnen Sie in jedem Schritt mittels Ihrer Funktionen von Aufgabe 26 den größten und kleinsten Eigenwert der Matrix T_k. (Falls Sie Aufgabe 26 nicht lösen konnten, verwenden Sie die Matlab-Funktion `eig` um die beiden Eigenwerte zu bestimmen).

(b) Interpretieren Sie die erzeugte Grafik.