Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 9

(Besprechung Mo. 7.1./14.1. 2013)

Aufgabe 30 *(Friedrichs Ungleichung)*

Gegeben Sei eine Funktion $u \in H_0^1(a,b) := \{u \in L^2(a,b) \mid u(a) = u(b) = 0,\ u' \in L^2(a,b)\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass die Friedrichs-Ungleichung $||u||_{L^2(a,b)} \leq c||u'||_{L^2(a,b)}$ mit einer Konstanten $c > 0$ gilt. Unser Ziel ist es nun, die Konstante c numerisch zu bestimmen.
Dazu approximieren wir die Funktion u durch eine Funktion $u_h \in S_h \subset H_0^1(a,b)$, wobei der Raum $S_h := \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ein n-dimensionaler Teilraum von $H_0^1(a,b)$ ist. Die Basis von S_h wird dabei wir folgt konstruiert:

- Wähle $n+2$ äquidistante Punkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ und setze $h := x_{i+1} - x_i$.
- Für $i = 1, \dots, n$ definiere ϕ_i als Hut-Funktion, d.h. ϕ_i ist eine stückweise lineare Funktion mit $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Eine Funktion $u_h \in S_h$ ist also eine stückweise lineare Funktion mit $u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \phi(x_i)$, und kann durch den Vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ der Funktionswerte von u_h an den Knoten x_i identifiziert werden.

(i) Zeigen Sie dass für $u_h \in S_h$ gilt $||u_h||^2_{L^2(a,b)} = \mathbf{u}^T M \mathbf{u}$ und $||u_h'||^2_{L^2(a,b)} = \mathbf{u}^T S \mathbf{u}$ mit

$$S = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{(Steifigkeitsmatrix)}$$

und

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{(Massenmatrix).}$$

Also gilt

$$||u_h||_{L^2(a,b)} \leq c||\nabla u_h||_{L^2(a,b)} \iff \mathbf{u}^T M \mathbf{u} \leq c^2\ \mathbf{u}^T S \mathbf{u}.$$

Setzen wir nun $\mathbf{u} := S^{-1/2}\mathbf{v}$ (S ist regulär), so erhalten wir

$$\mathbf{u}^T M \mathbf{u} \leq c^2 \mathbf{u}^T S \mathbf{u} \iff \mathbf{v}^T S^{-T/2} M S^{-1/2} \mathbf{v} \leq c^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v} \iff \frac{\mathbf{v}^T S^{-T/2} M S^{-1/2} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \leq c^2.$$

Wir suchen also den maximalen Eigenwert der Matrix $S^{-T/2} M S^{-1/2}$. Also können wir schreiben (mit $\mathbf{y} := S^{-1/2}\mathbf{x}$, S symmetrisch)

$$S^{-T/2} M S^{-1/2} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff S^{-T/2} M \mathbf{y} = \lambda S^{1/2} \mathbf{y} \iff M\mathbf{y} = \lambda S \mathbf{y}.$$

Wir erhalten also ein verallgemeinertes Eigenwertproblem mit den Matrizen M und S. Zur Abschätzung der Konstante c können dann die Wurzeln des minimalen und des maximalen Eigenwerts betrachtet werden.

(ii) Schreiben Sie ein Skript `Friedrichs.m`, in dem Sie für $n \in \{2, 4, 8, \dots, 2^{10}\}$ die Konstante c über obiges Eigenwertproblem bestimmen. Berechnen Sie die Eigenwerte mit der Funktion `eig` und mit der Funktion `eigs` und vergleichen Sie die Rechenzeiten. Zeichnen Sie dann die numerisch bestimmte Konstante über n in doppelt logarithmischer Skala. Erkläre Sie das Ergebnis.

(iii) Analysieren Sie den Einfluss der Intervalllänge von (a, b) auf die Konstante c.

Aufgabe 31 *(Matrixbündel)*

Berechnen Sie die Eigenwerte des Matrixbündels

$$A - \lambda B := \begin{pmatrix} 220 & 163 \\ 163 & 116 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 81 & 59 \\ 59 & 43 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32 *(Quadratisches Eigenwertproblem)*

Gesucht sind Eigenvektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und Eigenwerte λ, die das quadratische Eigenwertproblem

$$(A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3)x = 0$$

für Matrizen $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lösen. Verwenden Sie die Idee der Begleitmatrix eines Polynoms um eine Methode zu entwickeln, mit der dieses Eigenwertproblem gelöst werden kann. Implementieren und testen Sie die Methode. Wie lässt sich die von Ihnen entwickelte Methode auf allgemeine polynomiale Eigenwertprobleme

$$\left(\sum_{i=0}^{m} A_i\lambda^i\right) x = 0$$

für $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0, \dots, m$, $x \in \mathbb{R}^n$ übertragen?