Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 7
06.12.2013

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 13.12.2013, **vor der Übung**

Aufgabe 14 *(Fortsetzung: Mehrschrittverfahren, Konsistenzordnung, Konvergenz)* (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob das Mehrschrittverfahren aus Aufgabe 12

$$y_{j+4} - y_j = \frac{h}{3}(8f_{j+1} - 4f_{j+2} + 8f_{j+3})$$

konvergent ist.

Hinweis: In Aufgabe 12 haben Sie bereits die Konsistenzordnung $p = 4$ dieses Mehrschrittverfahrens bestimmt. Es gilt: *Ein lineares Mehrschrittverfahren ist genau dann konvergent, wenn es konsistent und stabil ist (Dahlquist).* Somit bleibt noch die Stabilität zu zeigen.

Definition 1. *Ein lineares Mehrschrittverfahren heißt* stabil *(auch* null-stabil*), wenn alle Nullstellen z_j des charakteristischen Polynoms $\rho(z) = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r z^r$ in der Einheitskreisscheibe liegen, d.h. wenn $|z_j| \leq 1$, und die Nullstellen auf dem Rand, d.h. die Nullstellen mit $|z_j| = 1$, nur einfach auftreten.*

Aufgabe 15 *(Mehrschrittverfahren, Milne-Simpson Verfahren, Konsistenz, Stabilität)* (4+4+8* Punkte)

Gegeben sei das Milne-Simpson Verfahren mit Schrittzahl $k = 2$:

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3}(f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1})$$

a) Untersuchen Sie das Verfahren auf Konsistenz und Stabilität und bestimmen Sie seine Konsistenzordnung.

b) Wenden Sie das Verfahren auf die folgende Anfangswertaufgabe an

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

Stellen Sie die resultierende homogene, lineare Differenzengleichung für die Näherung y_j auf und bestimmen Sie deren Lösung. Als Startschritt zur Berechnung von y_1 verwenden Sie einen expliziten Euler-Schritt.

c) Zeigen Sie für die Näherung aus b) durch Entwicklung der h-Potenzen:

$$\begin{aligned} y_j &= c_1(h)\lambda_1(h)^j + c_2(h)\lambda_2(h)^j, \\ \lambda_1(h) &= 1 - h + O(h^2), \\ \lambda_2(h) &= -(1 + h/3) + O(h^2), \\ c_1(h) &= 1 + O(h^2), \\ c_2(h) &= O(h^2). \end{aligned}$$

Welche Folgerung ergibt sich hieraus für die Näherung $y(t, h)$ an einer festen Stelle $t > 0$?

Hinweis: Verwenden Sie bei Aufgabenteil b) den folgenden Satz:

Satz 1. *Gegeben sei eine lineare, homogene Differenzengleichung mit Koeffizienten* α_i, $\alpha_k \neq 0$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i w_{j+i} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Dann gilt:

a) *Ist* z_1 *eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\rho(z) := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i$, *so ist durch* $w_j := z_1^j$ *eine Lösung der Differenzengleichung gegeben.*

b) *Ist* z_1 *eine doppelte Nullstelle von* ρ, *so ist neben* $w_j := z_1^j$ *auch* $\tilde{w}_j := j z_1^j$ *eine Lösung der Differenzengleichung.*

c) *Sind* $z_1, \ldots, z_k$ *die paarweise verschiedenen (einfachen) Nullstellen von* ρ, *so lautet die allgemeine Lösung der Differenzengleichung* $w_j = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i^j$.

Aufgabe 16 *(Programmieraufgabe, Inhärente Instabilität)* (8 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 10\left(y - \frac{x^2}{x^2+1}\right) + \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad y(0) = 0$$

mit

a) dem Trapezregel-Verfahren,

b) dem impliziten Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 9 c) und

c) dem Adams-Bashforth-Verfahren
(Verwenden Sie für die Startwerte das klassische RK4, siehe Aufgabe 8).

Verwenden Sie für jedes Verfahren 1000 Schritte. Zeichnen Sie alle Lösungen gemeinsam mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ für $x \in [0, 3]$ in eine gemeinsame Grafik. Verwenden Sie `ylim([-1.5,1.5]);`.

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt7** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.