Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 8
13.12.2013

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 10.01.2014, **vor der Übung**

Aufgabe 17 *(Absolute Stabilität von Mehrschrittverfahren)* (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die BDF-Methode

$$y_{j+2} - \frac{4}{3}y_{j+1} + \frac{1}{3}y_j = \frac{2}{3}hf(t_{j+2}, y_{j+2})$$

für alle $h\lambda$ mit $h > 0$ und $\lambda < 0$ absolut stabil ist.

Aufgabe 18 *(Stabilitätsfunktion von Einschrittverfahren)* (10 Punkte)

Gilt für die Näherungen y_j eines Einschrittverfahrens, angewendet auf die Testanfangswertaufgabe

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

die Beziehung $y_{j+1} = g(h\lambda)y_j, j \in \mathbb{N}_0$, mit einer Funktion $g : D \to \mathbb{C}, 0 \in D \subset \mathbb{C}$, so heisst g die *Stabilitätsfunktion* des Verfahrens. Das Verfahren heisst *absolut stabil für* $h\lambda$, falls $|g(h\lambda)| < 1$ ist.

a) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahrens.

b) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des impliziten Euler-Verfahrens.

c) Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion eines m-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens mit Koeffizientenschema $\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \end{array}$ mit $\mathbf{e}_m = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ und $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \det(I - zB) \neq 0\}$ für alle $z \in D$ gilt:

$$g(z) = 1 + zc^T(I - zB)^{-1}\mathbf{e}_m = \frac{\det(I - zB + z\mathbf{e}_m c^T)}{\det(I - zB)}.$$

Wie vereinfacht sich diese Formel für explizite Runge-Kutta-Verfahren?

Hinweis für das zweite Gleichheitszeichen von g(z):
Setzen Sie ein lineares Gleichungssystem aus dem K-Vektor des Runge-Kutta-Verfahrens und y_{j+1} an und berechnen Sie y_{j+1} mit Hilfe der Cramer'schen Regel.