Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 9
20.12.2013

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 10.01.2014, **vor der Übung**

Aufgabe 19 *(Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen)* (12+2* Punkte)

a) *(Zusatzaufgabe, 2 Zusatzpunkte)*
Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y^0 \tag{1}$$

korrekt gestellt heißt?

b) Formulieren Sie das folgende skalare Anfangswertproblem 3-ter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} y'''(t) &= 5y''(t) - y'(t) - 2\left(y(t)\right)^2 + 3\mathrm{e}^{2t}, \quad t \in [0, T] \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \end{aligned}$$

c) Der Satz von Picard-Lindelöf liefert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von AWP (1). Welche Voraussetzungen müssen hierfür erfüllt sein? Existiert für das AWP aus Teilaufgabe 19b) eine eindeutige Lösung? (Mit Begründung)

d) Zur numerischen Lösung von AWPen haben Sie in der Vorlesung die Trapezregel kennen gelernt. Skizzieren Sie die Idee/Herleitung dieses Verfahrens und beschreiben Sie den Algorithmus mit Hilfe eines Pseudo-Codes.

e) Die Verfahrensfunktion eines Einschrittverfahrens $y_{j+1} = y_j + h\Phi(t_j, y_j, h)$ sei gegeben durch

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y) + \frac{h}{2} g(t + ch, y + chf(t, y))$$

mit $g(t, y) := f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)$. Zeigen Sie, dass man für alle Parameter c ein Verfahren der Konsistenzordnung (mindestens) zwei und für einen speziellen Parameter c (welchen?) sogar ein Verfahren der Konsistenzordnung (mindestens) drei erhält.

f) Was ist ein Mehrschrittverfahren und wozu dient es? Geben Sie das Adams-Bashforth Verfahren für $k = 1$ (Euler-Verfahren) wieder und zeigen Sie, dass es von der Ordnung 1 ist.

g) Implizite Mehrschrittverfahren erreichen bei gleicher Schrittzahl oft eine höhere Konvergenzordnung als explizite Verfahren. Welche Probleme ergeben sich beim impliziten Verfahren im Gegensatz zu expliziten Verfahren, und wie können diese Probleme beseitigt werden?

Aufgabe 20 *(Multiple Choice, Zusatzaufgabe)* (4* Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Markieren Sie dies bitte eindeutig. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Bei einer falschen Antwort wird Ihnen **ein** Punkt abgezogen. Insgesamt gibt es keine negativen Punkte.

	wahr	falsch
1. Ein Schritt des impliziten Euler-Verfahrens hat höheren Rechenaufwand als ein Schritt des expliziten Euler-Verfahrens.	○	○
2. Ein n-stufiges Runge-Kutta-Verfahren hat die Ordnung n.	○	○
3. Ein n-stufiges explizites Runge-Kutter-Verfahren benötigt pro Schritt $n-1$ Funktionsauswertungen.	○	○
4. Zu zwei Schrittweiten h_1, h_2 seien e_1 und e_2 die entsprechenden globalen Diskretisierungsfehler eines Einschrittverfahrens. In einem `loglog(h,e)`- Plot entspricht die Steigung der Geraden der Konvergenzordnung α.	○	○

Aufgabe 21 *(Richtig oder Falsch)* (6 Punkte)

Richtig oder Falsch: Geben Sie für folgende Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen sie ihre Wahl kurz.

a) Das Mehrschrittverfahren

$$y_{j+1} = -2y_j + y_{j-1} + 3hf(y_j, t_j).$$

Ist konvergent.

b) Alle konsistenten 2-Schrittverfahren der Form

$$y_{j+1} = y_j + h\sum_{i=0}^{1} b_i f(y_{i+j}, t_{i+j})$$

sind konvergent.

Aufgabe 22 *(Steife Differentialgleichungen)* (8 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$ mit $A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}$ und $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Wie lautet die exakte Lösung?

b) Was ergibt das explizite Euler-Verfahren? Was folgt für die Schrittweite?
(Hinweis: Diagonalisieren Sie A mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a) und stellen Sie damit das sich mit dem expliziten Euler-Verfahren ergebende y_{k+1} in Abhängigkeit von y_0 dar. Leiten Sie daraus Forderungen an die Schrittweite ab.)

c) Welche Lösung liefert das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})?$$

Warum unterliegt dieses Verfahren keiner Schrittweitenbeschränkung?

Frohe Weihnachten!